PHYS-G1102 – Examen Janvier 2023

Correctif

Q1

1. $\vec{g} = (0, -g)$ où $g = 10\ m/s^2$.

2. $\vec{v}_0 = v_0 (\cos\theta, \sin\theta)$

3. $v_x = x'$ $v_z = z'$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_z = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta\ t \\ z(t) = v_0 \sin\theta\ t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

5. Impact $\Rightarrow z(t_c) = 0$.

Donc $v_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g t_c = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{t_c = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}}$$

D'autre part :

$$x(t_c) = L$$

Donc $v_0 \cos\theta \, t_c = L$

$$\Leftrightarrow \boxed{t_c = \frac{L}{v_0 \cos\theta}}$$

Cohérence de ces 2 formules implique

$$\frac{2 v_0 \sin\theta}{g} = \frac{L}{v_0 \cos\theta}$$

$$\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{gL}{2 \sin\theta \cos\theta}}$$

$\theta = 21°$ $g = 10 \ m/s^2$ $L = 6m$

$\Rightarrow v_0 = 9{,}47 \ m/s$; $t_c = 0{,}679 s$

6. $\vec{v_c} = (v_{cx}, v_{cz})$

$v_{cx} = v_0 \cos\theta = 8{,}84 \ m/s$

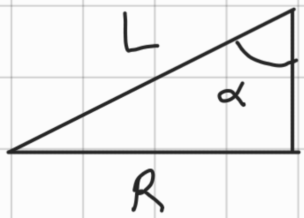
$v_{cz} = v_0 \sin\theta - g t_c = -3{,}40 \ m/s$

7. Angle α est tel que

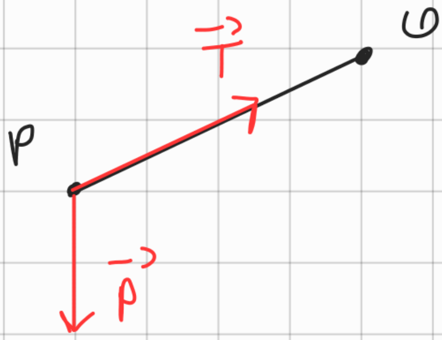
$$\tan \alpha = \frac{-v_{cz}}{v_{cx}}$$

Donc $\alpha = \arctan\left(-\frac{v_{cz}}{v_{cx}}\right) = 21^\circ$.

Q2

1. 

$\Rightarrow \boxed{R = L\sin\alpha}$

2. 

$\vec{T}$: tension

$\vec{P} = m\vec{g}$: poids

3. $\vec{T} = (T\sin\alpha,\ 0,\ T\cos\alpha)$

4. $\vec{P} + \vec{T}$ = force totale $\vec{F}$,

donc par $\vec{F} = m\vec{a}$ on trouve

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

MCU dans le plan horizontal,

donc $a_z = 0$, donc

$$\boxed{-mg + T\cos\alpha = 0.} \qquad (1)$$

Sur le dessin, $a_y = 0$, donc

$$\vec{a} = (a_x,\ 0,\ 0)$$

avec $a_x = a$ (norme de $\vec{a}$).

Donc

$$T \sin\alpha = m a$$

MCU $\Rightarrow$ $a = \omega^2 R$, donc

$$T \sin\alpha = m \omega^2 R$$

Or $R = L \sin\alpha$, d'où

$$\boxed{T = m\omega^2 L}.$$

En combinant avec (1) on trouve

$$-mg + m\omega^2 L \cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 L}\right)}$$

Avec $m = 25\,kg$, $\omega = 2.5\pi\, rad/s$, $L = 1.3\, m$:

$$\boxed{\begin{array}{l} T = 2005\ N \\ \alpha = 82{,}84° \end{array}}$$

5. $T_{max} = 5000\,N = m\omega_{max}^2 L$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\omega_{max} &= \sqrt{\frac{T_{max}}{mL}} \\ &= 12{,}4 \text{ rad/s} \\ &= 3{,}95\pi \text{ rad/s}\end{aligned}}$$

Q3

1. Immobile $\Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$. Or

$$\vec{F} = \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{N_3} + \vec{P}$$

et $\vec{P} = m\vec{g}$, donc

$$\vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{N_3} = -\vec{P} = -m\vec{g}$$

2. $\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_1}) = \overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{N_1} = (dN_1, 0, 0)$

$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_2}) = \vec{0}$ car $\overrightarrow{P_2P_2} = \vec{0}$

$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_3}) = \overrightarrow{P_2P_3} \times \vec{N_3} = (0, -LN_3, 0)$

3. $\vec{\tau}_{P_2}(\vec{P}) = \overrightarrow{P_2C_G} \times \vec{P}$

or $\overrightarrow{P_2C_G} = \left(\frac{3L}{4}, \frac{d}{5}, h\right)$

$\vec{P} = (0, 0, -mg)$

donc (formule) :

$$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{P}) = \left(-mg\frac{d}{5}, mg\frac{3L}{4}, 0\right)$$

4. Equilibre $\Rightarrow \vec{\tau}_{P_2} = \vec{0}$, donc

$$\left(dN_1, 0, 0\right) + \left(0, -LN_3, 0\right) + \left(-mg\frac{d}{5}, mg\frac{3L}{4}, 0\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dN_1 = mg\dfrac{d}{5} \\ LN_3 = mg\dfrac{3L}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} N_1 = \dfrac{mg}{5} \\ N_3 = \dfrac{3mg}{4} \end{matrix}}$$

$$N_2 = P - N_1 - N_3 = mg\left(1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{20 - 4 - 15}{20} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_2 = \frac{m}{20}g}$$

Q4

1. $E_p = \frac{1}{2} k \|\overrightarrow{P_0 P_i}\|^2 = \frac{1}{2} k d^2$

$E_c = 0 \quad \Rightarrow \quad E_i = \frac{1}{2} k d^2$

2. $F_d = \mu_d N$; $N = mg$, donc

$$F_d = \mu_d m g$$

Sens tant que le bloc est entre P_i et P_0 : vers la gauche sur le dessin.

(sens de $\overrightarrow{P_0 P_i}$).

3. $W(t_0, t_f)$? F_d constant, donc (formule) :

$$W = \vec{F_d} \cdot \overrightarrow{P_i P_0}$$

Avec le sens de $\vec{F_d}$ on a toujours

$$\vec{F_d} \cdot \overrightarrow{P_i P_0} = - F_d \|\overrightarrow{P_i P_0}\|,$$

donc $\boxed{W = -\mu_d m g d}$.

4. Bilan : $\Delta E = W$

où $\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p$

Or ici, on a :

ss-q 1).

$$\Delta E = E_{c,\text{final}} - E_i$$

$$= \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} k d^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} k d^2 = -\mu_d m g d$$

$$\Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{d\left(\frac{kd}{m} - 2\mu_d g\right)}}$$

5. On doit avoir

$$\frac{kd}{m} - 2\mu_d g \geqslant 0 .$$

A la limite ; $m = m_{max}$ avec

$$\frac{kd}{m_{max}} - 2\mu_d g = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m_{max} = \frac{kd}{2\mu_d g}} .$$