

## BA1 en Médecine et en Sciences Dentaires

**Examen***Juin***Nom:****Prénom:****Matricule:****Section:**

Q1: /10	Q2: /10	Q3: /15
Q4: /12	Q5: /10	Q6: /12

**Instructions:** L'usage de documents n'est pas autorisé. L'examen dure 3 heures. Il y a 6 questions. Vous êtes responsables de vérifier que cet examen comporte bien 13 pages. Vous n'êtes pas autorisés à dégraffer les pages de l'examen. Vous êtes autorisés à utiliser une calculatrice (pas de smartphone). Un aide-mémoire vous est fourni à la fin de ce document. Vous pouvez utiliser les résultats du cours théorique sans démonstration, mais pour le reste justifiez bien toutes vos réponses. Les valeurs numériques peuvent être arrondies au 2e chiffre significatif. Sauf indication contraire, tous les résultats numériques doivent être exprimés dans les unités du Système International. Vous pouvez prendre  $g = 10m/s^2$  et  $\rho_0 = 1000kg/m^3$ .

Lorsqu'il vous est demandé de dessiner une force sur un schéma, on demande que la direction et le sens soient le plus précis possible, mais la norme ne doit pas nécessairement être à l'échelle.

Veillez répondre à chaque question dans l'espace prévu à cet effet après chaque énoncé. S'il vous manque de la place, vous pouvez faire référence au verso d'une des feuilles d'examen pour indiquer où se trouve votre réponse. Veillez à indiquer *très clairement* si vous recourez à ce système. Enfin, le verso des feuilles d'examen peut-être également utilisé comme brouillon pour vos calculs et raisonnements.

**Note finale:** Le nombre total de points, sur les 6 questions, s'élève à 69 points. Le nombre de points obtenus est rapporté sur 20, et la note de l'examen est alors obtenue en arrondissant à l'entier le plus proche.

QUESTION 1: (10 points)

Un petit projectile est tiré depuis un point au sol que l'on note  $O$ , avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$ . En utilisant les coordonnées  $Oxyz$  telles que sur la figure 1, le vecteur  $\vec{v}_0$  est dans le plan  $Oxz$ , et on note  $\theta$  l'angle qu'il fait avec l'axe  $Ox$ . A une distance  $d$  de  $O$  le long de l'axe  $x$ , passe une ligne de chemin de fer, les rails étant dans le plan  $Oxy$  et parallèles à l'axe des  $y$ . Un train, que nous assimilons à un corps ponctuel, se déplace dans la direction des  $y$  croissants avec une vitesse  $\vec{V}$  constante. Le projectile est lancé au moment où le train passe au point de coordonnée  $y = Y_0$  avec  $Y_0 < 0$ .

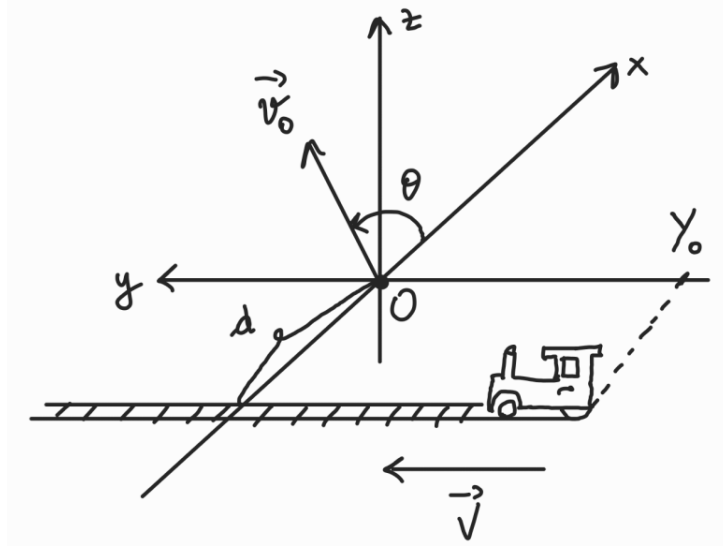


Figure 1: Un projectile est lancé depuis le point  $O$  vers un train en mouvement. Les rails sont parallèles à l'axe des  $y$ .

On néglige les forces de frottement dans ce problème, et on utilise les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  tels que sur la figure 1. Le but de cette question est de déterminer  $v_0$  et  $\theta$  de façon à ce que le projectile intercepte le train.

1. (1pt) Exprimer les composantes du vecteur d'accélération gravitationnelle  $\vec{g}$  en fonction de  $g$ .
2. (1pt) Exprimer les composantes de la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  en fonction de  $v_0$  et  $\theta$ .
3. (1pt) On note  $x_P(t)$ ,  $y_P(t)$  et  $z_P(t)$  les coordonnées du projectile au temps  $t$ . Que valent ces composantes en fonction des paramètres du problème, en fonction de  $t$ ?

4. (1pt) Même question que ci-dessus, mais avec les coordonnées  $x_T$ ,  $y_T$  et  $z_T$  du train.

5. (4pt) On note  $t_*$  le temps auquel l'impact a lieu. Déterminer  $t_*$ ,  $v_0$  et  $\theta$  en fonction de  $Y_0$ ,  $V$ ,  $d$  et  $g$  afin que la collision ait lieu.

6. (2pt) Application numérique: calculer  $v_0$  et  $\theta$  pour  $d = 1.5m$ ,  $V = 22km/h$  et  $Y_0 = -2m$ .

QUESTION 2: (10 points)

Dans le champ de pesanteur, on considère un corps ponctuel en un point  $P$  de masse  $m = 22\text{kg}$  attaché à une corde. La corde est attachée à son autre extrémité en un point fixe  $O$ . Le corps est en mouvement circulaire uniforme dans le plan horizontal  $Oxy$ , le centre de rotation  $C$  étant situé à la verticale, en dessous de  $O$ . On note  $\alpha$  l'angle que fait la corde avec la verticale  $Oz$ . Dans toute cette question, on s'intéresse à l'instant représenté sur la figure 2, où le vecteur  $\vec{PC}$  est parallèle à l'axe des  $y$ .

La corde est de longueur  $L = 0.95m$ , la vitesse angulaire  $\omega$  vaut  $1.8\pi\text{rad/s}$ .

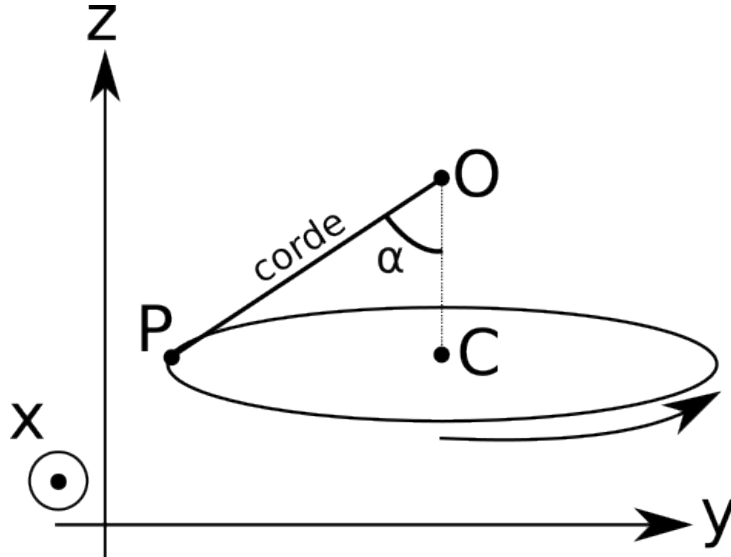


Figure 2: Une masse en  $P$  suspendue par une corde est maintenue en mouvement circulaire uniforme de centre  $C$ .

1. (1pt) Que vaut le rayon  $R$  de ce mouvement circulaire uniforme? Vous pouvez laisser  $\alpha$  indéterminé dans votre réponse.
2. (1pt) Représenter toutes les forces qui s'exercent sur le corps au point  $P$  sur la figure 2.
3. (1pt) Décomposer la force  $\vec{T}$  exercée par la corde sur la masse  $m$  en fonction de la tension  $T$  et de l'angle  $\alpha$ . Vous pouvez laisser la tension  $T$  et l'angle  $\alpha$  indéterminés dans ces formules.

4. (6pt) Déterminer la valeur numérique de l'angle  $\alpha$  et de la tension  $T$ . (*Aide: on rappelle que pour un MCU, l'accélération du corps satisfait à une relation bien spécifique.*)
5. (1pt) On suppose que si la tension dans la corde dépasse la valeur critique  $T_c = 4000N$ , la corde cède. Quelle est la valeur maximale  $\omega_{\max}$  que peut prendre la vitesse angulaire afin que la corde ne cède pas? Donner la valeur numérique.

QUESTION 3: (15 points)

On considère une balançoire à bascule formant un angle  $\alpha = 13^\circ$  avec l'horizontale schématisée sur la figure 3. Sur la partie basse de la balançoire se trouvent deux corps ponctuels de masses  $m_1 = 12kg$  et  $m_2 = 16kg$ . La masse  $m_1$  est à l'extrémité de la balançoire, cette dernière étant en appui sur le sol: on note  $\vec{N}$  la force exercée par le sol sur la balançoire à cet endroit. Sur la partie haute, à une distance  $d = 10cm$  du point pivot, se trouve un corps ponctuel de masse  $M = 20kg$ . L'ensemble du système est immobile.

Dans toute cette question, on vous demande d'utiliser le système d'axes  $Oxyz$  de la figure 3, le point  $O$  étant pris sur le pivot. De plus, on néglige la masse de la balançoire ainsi que les frottements au point pivot.

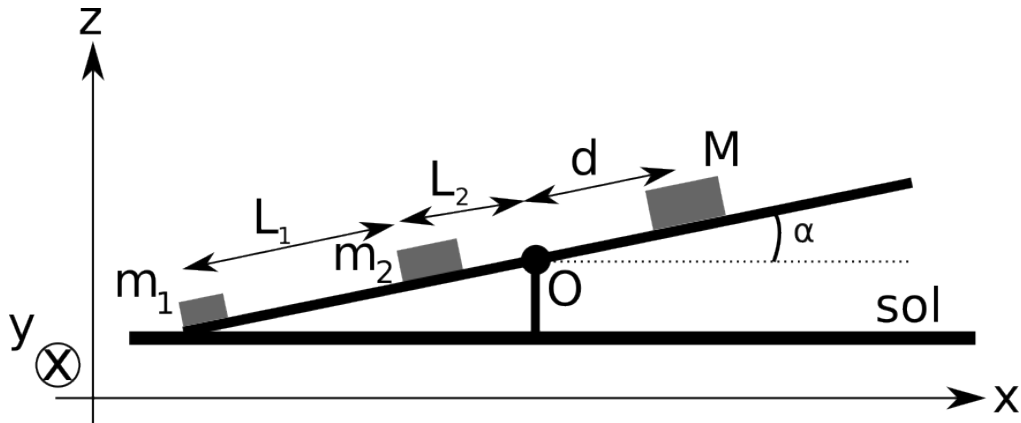


Figure 3: Les masses  $m_1$  et  $m_2$  sont repérées avec les paramètres  $L_1$  et  $L_2$  comme indiqué ci-dessus, avec  $L_1 = 0.5m$  et  $L_2 = 7cm$ .

1. (6pt) Déterminer les vecteurs moment de force par rapport à  $O$  des poids des masses  $m_1, m_2$  et  $M$  et de la force normale  $\vec{N}$ , en laissant  $N$  indéterminé dans votre réponse.
  
2. (3pt) En considérant la condition d'équilibre appropriée, déterminer le vecteur  $\vec{N}$ . Que vaut la valeur numérique de sa norme?

3. (3pt) Que vaut la force  $\vec{N}_P$  exercée par le pivot sur la balançoire?

4. (3pt) On suppose que nous déplaçons la masse  $m_1$  vers le haut sur la balançoire d'une distance  $\ell_1$ . A quelle valeur de  $\ell_1$  l'équilibre de ce système est-il rompu?

QUESTION 4: (12 points)

Un tube de Prandtl est un dispositif ingénierieux permettant d'estimer la vitesse du vent en exploitant les lois de la dynamique des fluides. Le système est représenté sur la figure 4 et est composé d'un tube en verre dans lequel se trouve de l'eau (masse volumique:  $\rho_0$ ). Le tube a deux petites ouvertures: l'une située au point  $A$  et l'autre au point  $D$ . Les points  $B$  et  $C$  indiquent respectivement la hauteur de l'eau dans la partie gauche et droite du tube. On suppose dans ce problème que le système est dans un état stationnaire, c'est-à-dire que l'écoulement de l'air autour du tube est stationnaire et, par conséquent, les points  $B$  et  $C$  sont immobiles.

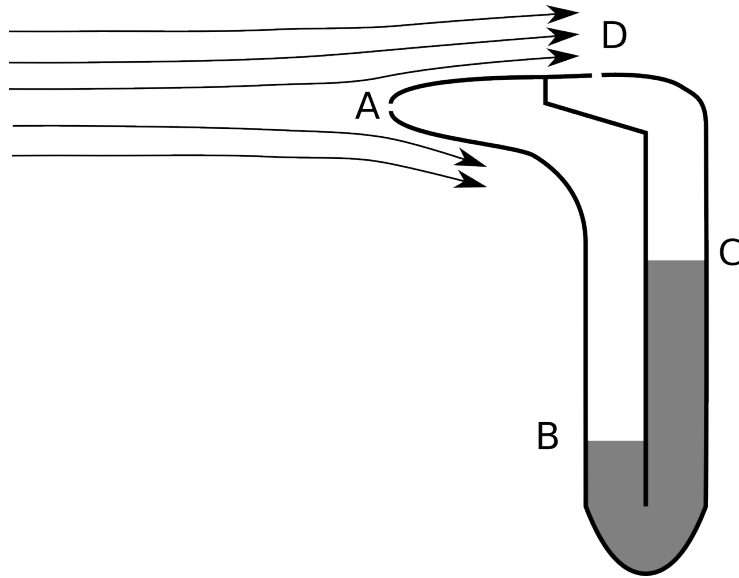


Figure 4: L'air s'écoule de gauche à droite sur cette figure. L'eau, représentée en gris, est immobile dans le tube.

La norme de la vitesse de l'air à mesurer est notée  $v_D$ , et correspond à la vitesse au point  $D$ .

*Remarque:* l'air étant un fluide compressible, les formules vues au cours ne sont pas applicables telles quelles. Afin de permettre la résolution de cette question, nous supposons ici que l'air est incompressible et on prend  $\rho_{\text{air}} = 1.2 \text{kg/m}^3$  pour sa masse volumique. De plus, on accepte sans démonstration que dans ce problème, l'air, si il est immobile, est à la pression de 1 atmosphère, quelle que soit la hauteur.

1. (3pt) Que valent les normes  $v_A, v_B$  et  $v_C$  des vitesses en  $A, B$  et  $C$ ? (*Indice:* il découle des hypothèses de ce problème qu'il n'y a pas d'accumulation d'air dans le tube!)
  
2. (3pt) On note  $\Delta h$  la différence de hauteur entre  $B$  et  $C$  (avec  $\Delta h > 0$  lorsque  $C$  est plus haut que  $B$ , comme sur la figure). Que vaut la différence de pression  $p_C - p_B$ ? Exprimer votre réponse en fonction de  $\Delta h$ , et donner également la valeur numérique pour  $\Delta h = 5 \text{cm}$ .





QUESTION 5: (10 points)

La figure 5 revient sur le problème de la transduction de force appliquée sur le kinocil de cellules sensorielles. Votre but est de relier le courant électrique  $I$  entrant dans la cellule et le déplacement  $d$  du kinocil, à l'aide d'un modèle mécanique d'ouverture de canal ionique au sein d'une membrane cellulaire isolante maintenant une différence de potentiel  $\Delta V = 70mV$  et d'épaisseur  $\ell = 10nm$  (partie a de la figure). Le canal est composé de deux compartiments d'épaisseurs identiques  $\ell/2$  et de conductivités identiques  $\sigma = 0.1/\Omega m$ . Celui du dessus a une ouverture partielle  $x$  par effet levier du kinocil (partie b de la figure) et une profondeur  $w = 500pm$  (section  $x \times w$ ); celui du dessous est complètement ouvert (section  $w \times w$ ). La longueur hors-canal du kinocil vaut  $L = 20\mu m$ .

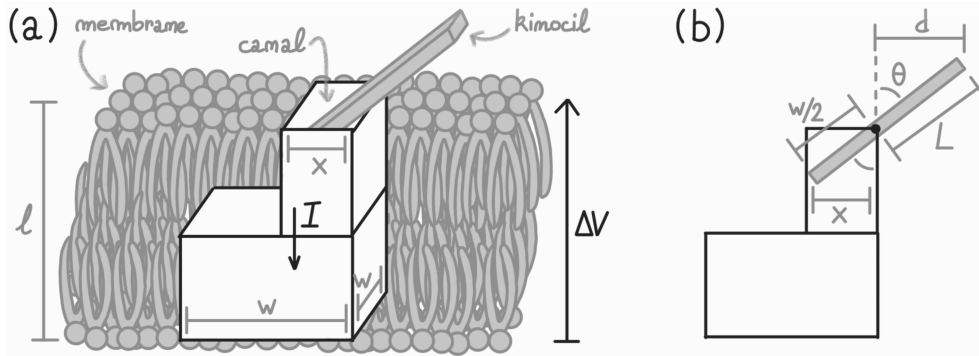


Figure 5: (a) Modèle d'ouverture d'un canal ionique. (b) Effet de levier d'un kinocil.

- (5pt) Exprimez le courant  $I$  passant dans le canal en fonction de son ouverture  $x$  et d'autres paramètres du problème.
- (3pt) Réécrivez votre réponse en terme du déplacement  $d$  du kinocil. Démontrez ainsi la loi  $I = \frac{a}{1+2L/d}$  et déterminez le coefficient  $a$ . (Aide: Reliez  $x$  à  $d$  via la partie b de la figure.)
- (2pt) Le déplacement  $d$  du kinocil ne dépasse jamais  $1\mu m$ . Justifiez que la loi précédente se réduit approximativement à  $I = \alpha d$  et déterminez le coefficient  $\alpha$  numériquement. (Aide: Approximez  $1 + X$  par  $X$  si  $X \geq 40$ .) Si vous n'avez pas trouvé de réponse à la sous-question précédente, utilisez  $a = 0.5pA$ .

QUESTION 6: (12 points)

La figure 6 montre un “trapèze magnétique.” Une barre de cuivre homogène (en gris) de masse  $m = 11$  grammes et de longueur  $L = 10\text{cm}$  est accrochée à deux fils conducteurs rigides de même longueur  $L$  et de masses négligeables. Ces deux fils sont rattachés à un mécanisme permettant un balancement de la barre tout en la maintenant horizontale, et y injectant un courant d’intensité  $I = 5\text{A}$ . Ce dispositif est placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  de  $0.5\text{T}$  dirigé verticalement vers le haut. Dans ce problème, utilisez le système d’axes  $(x, y, z)$  de la figure et  $g = 10\text{m/s}^2$  pour l’accélération pesanteur.

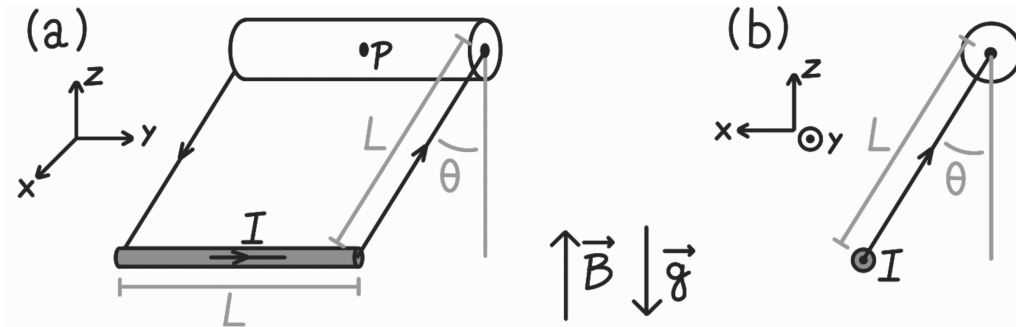


Figure 6: Trapèze magnétique. (a) Vue en perspective. (b) Vue de profil.

- (4pt) Calculez les composantes de la force magnétique  $\vec{F}_{\text{magn}}$  exercée sur le centre de gravité de la barre de cuivre, et celles de son poids  $\vec{F}_{\text{poids}}$ .
- (4pt) Exprimez les composantes des moments de forces associées  $\vec{\tau}_{\text{magn}}$  et  $\vec{\tau}_{\text{poids}}$  en fonction de l’angle  $\theta$  du trapèze par rapport à la verticale. Calculez ces moments de force par rapport au centre  $P$  du dispositif de balancement (voir partie a de la figure).

3. (2pt) Déterminez l'angle  $\theta$  à l'équilibre de ces deux moments de forces. (*Aide: Si vous ne l'avez pas encore utilisé, rappelez-vous que  $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta$ .*)
4. (2pt) Deux forces manquent pour que la barre soit à l'équilibre. Identifiez les et justifiez pourquoi elles n'interviennent pas dans la détermination de  $\theta$  à l'équilibre. (*Aide: Vous pouvez calculer ces forces et leurs moments de façon explicite, mais cela n'est pas nécessaire pour répondre.*)

AIDE-MÉMOIRE

$$\begin{array}{lll}
 \rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3 & \|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} & 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} \\
 g = 10 \text{ m/s}^2 & \frac{d \sin(ax)}{dx} = a \cos(ax) & \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha \\
 \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p & \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha & \vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r} \\
 \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta & \|\vec{A} \times \vec{B}\| = AB \sin \theta & v = \omega r \\
 \cos \alpha = \frac{\text{adjacent}}{H} & F_s^{\text{max}} = \mu N & Q = Av \\
 E_P = \frac{1}{2} k r^2 & E_P = -m \vec{g} \cdot \vec{r} & W = \vec{f} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\
 A = \pi R^2 & \Delta E_c = W_{\text{tot.}} & 
 \end{array}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

$$\begin{array}{lll}
 e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} & \epsilon_0 = 8.9 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}^2 \text{s}^4}{\text{kg m}^3} & \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \\
 1 \mu X = 10^{-6} X \text{ (micro)} & 1 \text{ n} X = 10^{-9} X \text{ (nano)} & 1 \text{ p} X = 10^{-12} X \text{ (pico)} \\
 \vec{F}_{Q/q} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \vec{F}_{\vec{E}/q} = q\vec{E} & \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \\
 \sigma = Q/A & \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} & \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \\
 \frac{1}{2} m v^2 + qV & \Delta V = EL & V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\
 \Delta V = RI & R = \frac{L}{S} \frac{1}{\sigma} & I = env_e S \\
 R = R_1 + R_2 & \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & P = \Delta VI \\
 \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} & B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} & B = \frac{\mu_0 I}{2R} \\
 B = \mu_0 \frac{N}{L} I & \vec{F}_{\vec{B}/I} = Id\vec{\ell} \times \vec{B} & F_{I_1/I_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d} \\
 \vec{F}_{\vec{B}/q} = q\vec{v} \times \vec{B} & \vec{v} \perp \vec{v} \times \vec{B} & R_L = \frac{mv}{|q|B}
 \end{array}$$