Examen Janvier 2022 - BV

Question 1 - 8 pt

1). $\vec{OP} = L(\cos\alpha, \sin\alpha)$

2). $\vec{v}_0 = v_0(\cos\theta, \sin\theta)$

3). $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

$\vec{r}_0 = \vec{0}$ et $\vec{g} = (0, -g)$ donc :

$$\vec{r}(t) = \left(v_0 t\cos\theta,\ v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}g t^2\right)$$

4). $\vec{r}(t_*) = \vec{OP}$

$$v_0 t_* \cos\theta = L\cos\alpha$$

$$v_0 t_* \sin\theta = L\sin\alpha + \frac{1}{2}g t_*^2$$

5). $t_* = \frac{L}{v_0}\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$ => on substitue !

$$v_0\left(\frac{L}{v_0}\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}\right)\sin\theta = L\sin\alpha + \frac{1}{2}g\frac{L^2}{v_0^2}\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow L\cos\alpha\tan\theta - L\sin\alpha = \frac{1}{2}g\frac{L^2}{v_0^2}\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_0^2 = \frac{1}{2} g L^{\cancel{2}} \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta} \frac{1}{\cancel{L}\cos\alpha\tan\theta - \cancel{L}\sin\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} g L \frac{\cos\alpha}{\cos^2\theta} \frac{1}{\tan\theta - \tan\alpha}$$

$$\begin{cases} v_0 = \sqrt{\dfrac{gL}{2} \dfrac{\cos\alpha}{\cos^2\theta(\tan\theta - \tan\alpha)}} \\ \\ t_* = \dfrac{L\cos\alpha}{v_0\cos\theta} \end{cases}$$

A.N. : $g = 10\,m/s^2$ $\quad L = 5\,m$ $\quad \alpha = 12°$ $\quad \theta = 42°$

$v_0 = 8{,}02329\ldots\ m/s$

$t_* = 0{,}82035\ s$

6). Si $\theta < \alpha$, alors $\tan\theta < \tan\alpha$, et on aurait $v_0^2 < 0$, ce qui est impossible.

Examen Janvier 2022 - BV

Question 2 - 19 pt

$M_a = 9 \times 10^{20}$ kg $\qquad v_i = 1200$ km/h

$M_T = 6 \times 10^{24}$ kg

1). $v_i = \dfrac{1200 \times 1000}{60 \times 60} \dfrac{m}{s} = 333{,}33$ m/s

2). $v_{cm} = \dfrac{1}{M_a + M_T} \left(M_a v_i + \underbrace{M_T v_T}_{=0} \right) = \dfrac{v_i}{1 + M_T / M_a}$

A.N. : $\dfrac{M_T}{M_a} = \dfrac{6 \times 10^{24}}{9 \times 10^{20}} = 6667$

$\Rightarrow \quad v_{cm} = 0{,}05$ m/s

3). $p_a = M_a v_i$

A.N. : $p_a = 2997 \times 10^{20}$ kgm/s

$\simeq 3 \times 10^{23}$ kgm/s

4). $p_T = M_T v_T = 0$

5). $E_c = \frac{1}{2} M_a v_a^2 + \frac{1}{2} M_T v_T^2 \qquad v_T = 0.$

A.N. : $E_c = \frac{1}{2} 9 \times 10^{20} (333)^2$ J $= 4{,}99 \times 10^{25}$ J

6). On utilise la loi de conservation de l'impulsion.

Cela signifie :

$$p_a + p_T = p_T'$$

La masse totale du système, après la collision, est $M_T + M_a$

Ainsi on trouve

$$M_a v_i = (M_a + M_T)\, v_T'$$

$$\Rightarrow \quad v_T' = \frac{v_i}{1 + M_a/M_T}$$

A.N. : $v_T' = 0{,}05\ m/s$.

7). $E_c' = \frac{1}{2}(M_T + M_a)(v_T')^2$

$$= 1{,}5 \times 10^{22}\ J$$

8). Collision élastique signifie que l'énergie cinétique est conservée.

Or on a $E_c \neq E_c'$, donc ce n'est pas une collision élastique.

$E_{diss.} = E_c - E_c'$

A.N. : $E_{diss.} \simeq 4{,}99 \times 10^{25}$ J.

9). $v_e = \sqrt{\dfrac{2GM_S}{d}}$

A.N. : $v_e = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 2}{1{,}5} 10^{-11+30-11}}$ m/s

$= 4{,}2174\ldots \times 10^{4}$ m/s

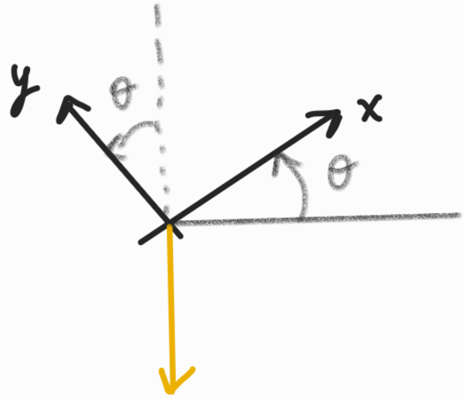
10). On a $v_i = 333$ m/s et $v_e = 4217$ m/s,

donc $v_i < v_e \Rightarrow$ l'astéroïde ne vient (probablement) pas de l'extérieur du système solaire !

Examen Janvier 2022 - BV

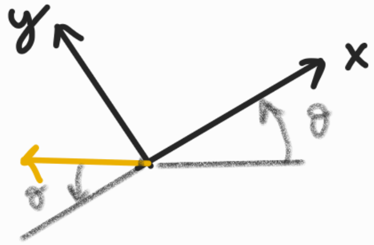
Question 3 - 11 pt

$M = 15\,kg$ $\theta = 9°$ $f = 15\,N$ $\mu = 0{,}3$

1). 

$\vec{g} = g(-\sin\theta, -\cos\theta)$

A.N. : $\vec{g} = (-1{,}564\ m/s^2, -9{,}877\ m/s^2)$

2). 

$\vec{f} = f(-\cos\theta, \sin\theta)$

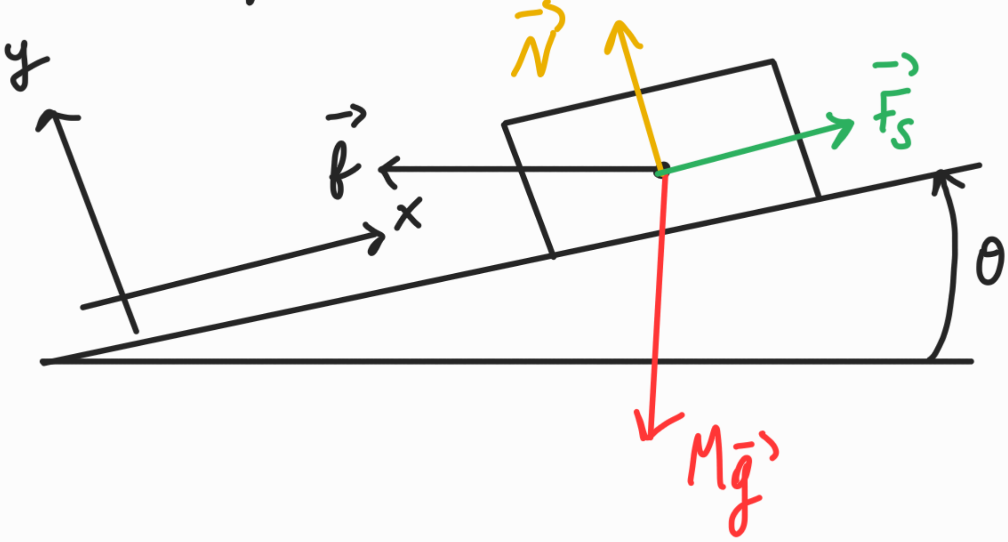
A.N. : $\vec{f} = (-14{,}81\ N, 2{,}34\ N)$

3). Liste :

Poids : $M\vec{g}$

Force normale du plan incliné : $\vec{N}$

Force de frottements statiques : $\vec{F_s}$



4). 2e loi de Newton : $\vec{F} = M\vec{a}$, où $\vec{F}$ = force totale et $\vec{a} = \vec{0}$ car bloc immobile.

Donc

$$\vec{f} + M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_s} = \vec{0}$$

On a : $\vec{N} = (0, N)$ et $\vec{F_s} = (F_s, 0)$

On trouve alors :

$$\begin{cases} -f\cos\theta - Mg\sin\theta + F_s = 0 \\ +f\sin\theta - Mg\cos\theta + N = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_s = f\cos\theta + Mg\sin\theta \\ N = Mg\cos\theta - f\sin\theta \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \vec{F_S} = (f\cos\theta + Mg\sin\theta) \\ \vec{N} = (0, Mg\cos\theta - f\sin\theta) \end{cases}$$

$$\text{A.N.}: \begin{cases} \vec{F_S} = (38{,}28\,N, 0) \\ \vec{N} = (0, 145{,}81\,N) \end{cases}$$

5). 3e loi de Newton $\Rightarrow$ les forces exercées par le bloc sur le plan incliné sont $-\vec{N}$ et $-\vec{F_S}$.

A.N. :

$$\begin{cases} -\vec{N} = (0, -145{,}81\,N) \\ -\vec{F_S} = (-38{,}28\,N, 0) \end{cases}$$

6). Le bloc ne glisse pas tant que la force de frottement reste $\leq \mu N$.

Donc

Glisse pas $\Leftrightarrow$

$$f\cos\theta + Mg\sin\theta \leq \mu(Mg\cos\theta - f\sin\theta)$$

On résoud pour f :

$$f(\cos\theta + \mu\sin\theta) \leq Mg(\mu\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow f \leq Mg\,\frac{\mu\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

Donc le bloc se met à glisser dès que f excède la valeur critique

$$f_c = Mg\,\frac{\mu\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

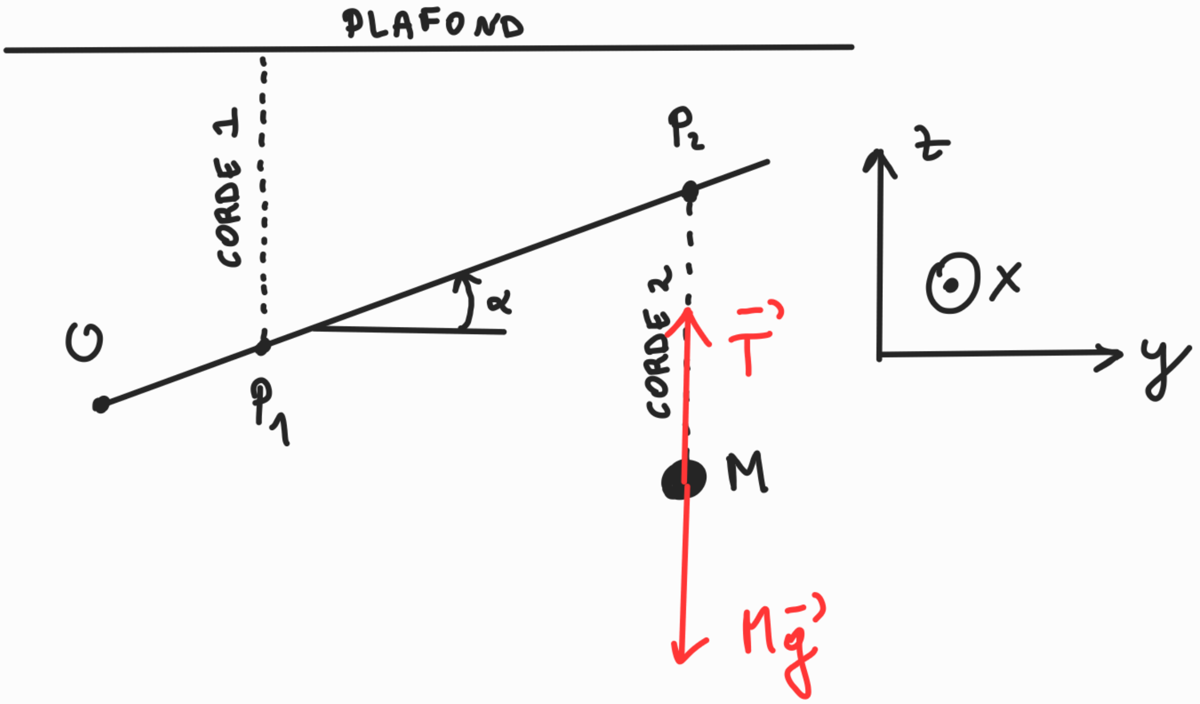
A.N. : $f_c = 20{,}28\ N$.

Examen Janvier 2022 - BV

Question 4 - 18 pt

1). Liste : Poids $M\vec{g}$

Force de la corde 2 : $\vec{T}$



2). $\vec{F} = M\vec{a}$ pour la masse M, avec $\vec{a} = \vec{0}$, implique que la somme des forces sur M doit s'annuler :

$$M\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}$$

On a les décompositions suivantes :

$$M\vec{g} = (0, 0, -Mg)$$

$$\vec{T} = (0, 0, T)$$

et donc

$$-Mg + T = 0$$

Donc $\vec{T} = (0, 0, Mg)$.

A.N. : $\begin{cases} M\vec{g} = (0, 0, -50N) \\ \vec{T} = (0, 0, 50N) \end{cases}$

3). Force exercée par la corde 2 sur la tige : $\vec{T_2}$: doit être de norme T et dirigée vers le bas, donc

$$\vec{T_2} = (0, 0, -T) = (0, 0, -50N).$$

4). $\vec{\tau}_O(\vec{T_2}) = \vec{OP_2} \times \vec{T_2}$ $\otimes$

$$= (-\tau_O(\vec{T_2}), 0, 0)$$

Norme : $\tau_O(\vec{T_2}) = l_2 T \cos\alpha$

A.N. : $\tau_O(\vec{T_2}) = 19{,}08\ Nm$

5). La tension dans la corde 1 est fixée par la condition que la tige est immobile. En particulier, elle ne tourne pas autour du pivot en O. Donc la somme des moments de force (par rapport à n'importe quel point, en particulier O) doit s'annuler.

On doit donc calculer $\vec{\tau}_O(\vec{T}_1)$, où $\vec{T}_1$ est la force exercée par la corde 1 sur la tige :

$$\vec{T}_1 = (0, 0, T_1)$$

et $\vec{\tau}_O(\vec{T}_1) = \overrightarrow{OP_1} \times \vec{T}_1$.

Sens : $\odot$

Donc

$$\vec{\tau}_O(\vec{T}_1) = (\tau_O(\vec{T}_1), 0, 0).$$

Norme ?

$$\tau_O(\vec{T_1}) = l_1 T_1 \cos\alpha$$

On veut donc

$$\vec{\tau}_O(\vec{T_1}) + \vec{\tau}_O(\vec{T_2}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad l_1 T_1 \cos\alpha - l_2 T_2 \cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_1 = \frac{l_2}{l_1} T_2$$

A.N. : $T_1 = 3 \times 50 N = 150 N$

6). Pour cela nous devons utiliser la 2e loi de Newton appliqué à la <u>tige</u>, avec $\vec{a} = \vec{0}$.

On a donc $\vec{f} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$.

Comme on a

$$\vec{T_1} = (0, 0, T_1)$$

$$\vec{T_2} = (0, 0, -T_2)$$

avec $T_1 = \frac{l_2}{l_1} T_2$ et $T_2 = Mg$, on trouve

$$\vec{f} = -\left(\vec{T_1} + \vec{T_2}\right) = \left(0, 0, T_2 - T_1\right)$$

$$= \left(0, 0, Mg\left(1 - \frac{l_2}{l_1}\right)\right)$$

A.N. : $\vec{f} = \left(0, 0, -100\,N\right)$

7). On a $T_1 = \frac{l_2}{l_1} T_2 = \frac{l_2}{l_1} Mg$.

Donc $T_1 = T_c \Rightarrow T_c = \frac{l_2}{l_1} Mg$

$$\Leftrightarrow M = \frac{l_1}{l_2} \frac{T_c}{g}$$

A.N. : $M = \frac{1}{3} \frac{1260}{10}\,kg = 42\,kg$

Examen Janvier 2022 - BV

Question 5 - 14 pt

$V_1 = 500\ cm^3 = 5\times10^{-4}\ m^3$

$V_2 = 5\times10^{-4}\ m^3$

$\rho_0 = 1000\ kg/m^3$

$V_i = 10\%\, V_1 = 5\times10^{-5}\ m^3$

$\rho_1 = 60\ kg/m^3$

$\rho_2 = 1200\ kg/m^3$

1). $M_1 = \rho_1 V_1$ $\qquad M_2 = \rho_2 V_2$

A.N. : $M_1 = 0{,}03\ kg = 30\ g$

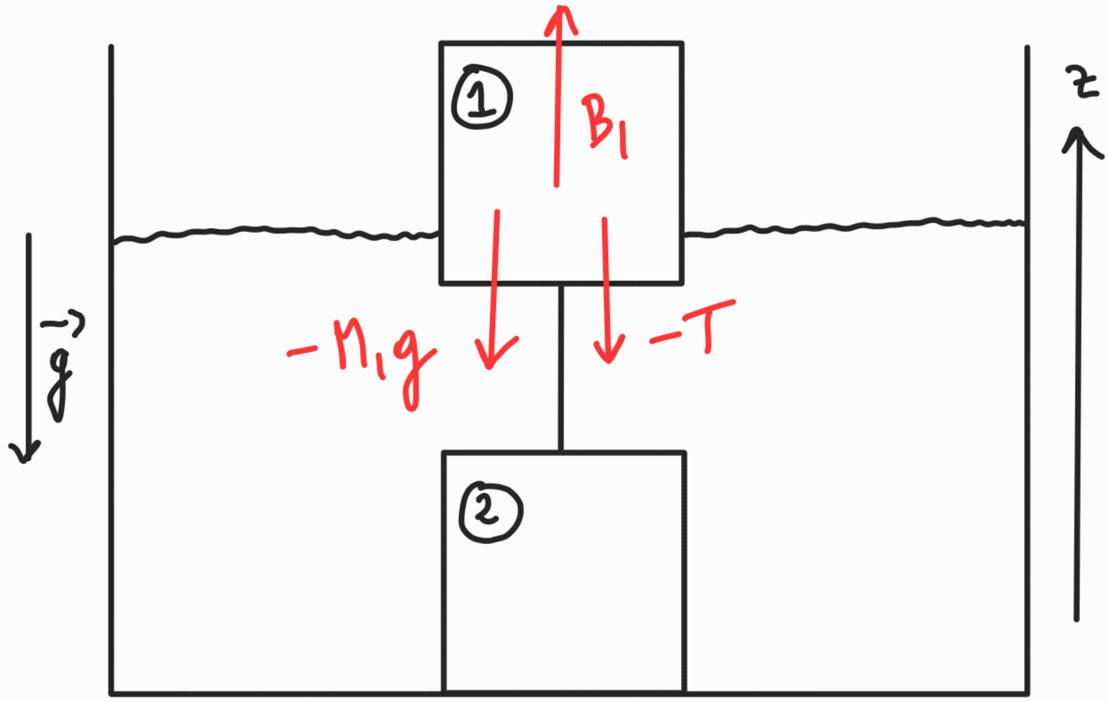
$M_2 = 0{,}6\ kg = 600\ g$

2). Liste :

Poids : $-M_1 g$

Force de la corde : $-T$

Poussée d'Archimède : B_1



3). On doit utiliser la 2e loi de Newton appliquée au bloc 1, avec $a = 0$.

Donc

$$-M_1 g - T + B_1 = 0$$

Or on a $B_1 = \rho_0 g V_i$,

donc

$$T = B_1 - M_1 g = \rho_0 g V_i - M_1 g$$

$$= g\left(\rho_0 V_i - M_1\right)$$

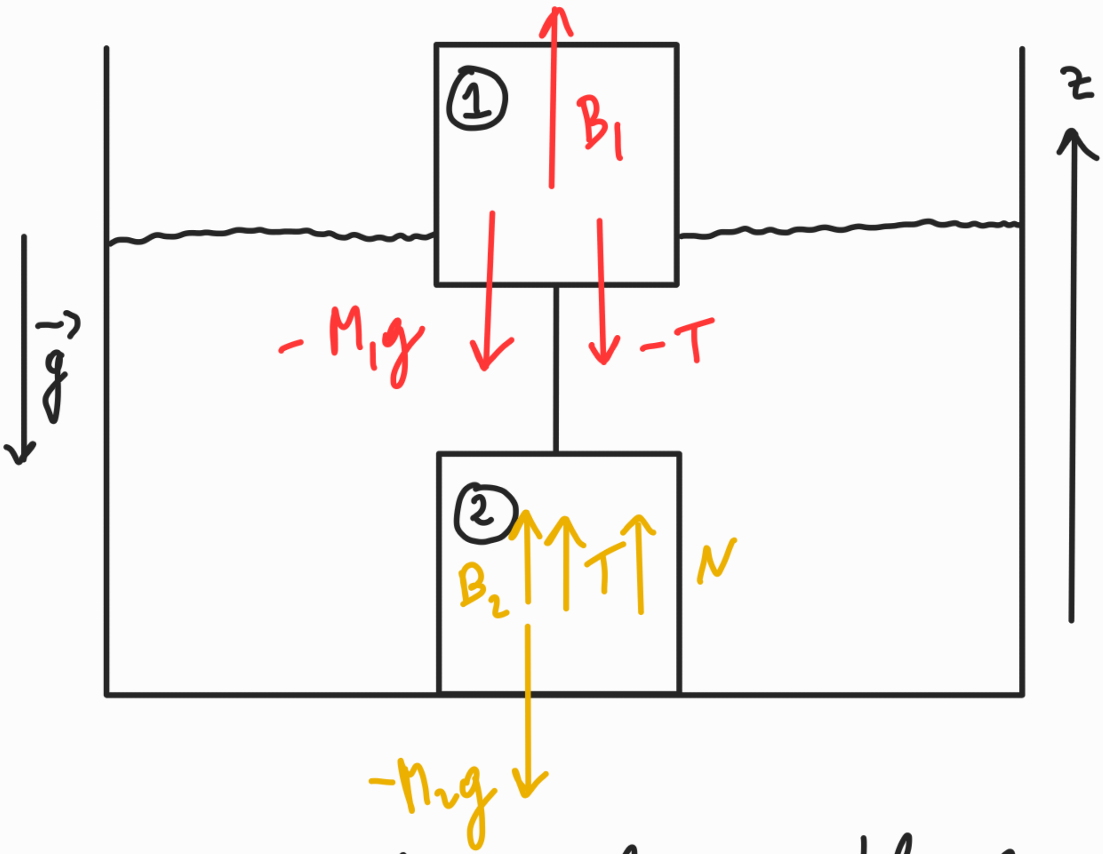
A.N. : $T = 0{,}2\ N$

4). Liste : Poids : $-M_2 g$

Tension : $+T$

Archimède : B_2

Normale du sol : $+N$



5). On applique la 2e loi au bloc 2, avec $a = 0$. Donc :

$$B_2 + T + N - M_2 g = 0$$

$$\Rightarrow N = M_2 g - B_2 - T$$

Or $B_2 = \rho_0 g V_2$ et $T = g(\rho_0 V_i - M_1)$, donc :

$$N = g\left(M_2 - \rho_0 V_2 - \rho_0 V_i + M_1\right)$$

$$N = g\left(M_1 + M_2 - \rho_0 (V_i + V_2)\right)$$

A.N. : $N = 0{,}8\,N$

6). Le bloc 2 se détache du fond de la bassine si $N = 0$.

On cherche donc V_i tel que

$$M_1 + M_2 - \rho_0 (V_i + V_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad V_i + V_2 = \frac{M_1 + M_2}{\rho_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad V_i = \frac{M_1 + M_2}{\rho_0} - V_2$$

Or on a : $\dfrac{M_1 + M_2}{\rho_0} - V_2 = 1{,}3 \times 10^{-4}\ m^3$

Comme c'est bien $< V_1$, le bloc 2 va se détacher du fond.

Ceci se passe lorsque

$$V_i = 1{,}3 \times 10^{-4}\,m^3,$$

c'est-à-dire lorsque

$$\frac{V_i}{V_1} = \frac{1{,}3 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-4}} = 26\,\%$$

du volume du bloc 1 est immergée.

Examen Janvier 2022 - BV

Question 6 - 11 pt

$V = 5$ cm/s $\qquad h_B = 20$ cm $\qquad h_c = 30$ cm

$\rho = \rho_0 = 1000$ kg/m³

1). Conservation du débit :

$$Q_A = Q_B + Q_c$$

Formule : $Q = Av$, ou A = aire de la section du conduit. Donc pour nous :

$$Q_A = \pi R^2 V$$

$$Q_B = \pi r^2 v \qquad Q_c = \pi r^2 v$$

$$\Rightarrow \pi R^2 V = 2\pi r^2 v$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{R^2}{2r^2} V \qquad \left(\frac{R}{r} = \frac{1.5}{0.75} = 2\right)$$

A.N. : $v = \frac{1}{2} 4 \times 5$ cm/s $= 10$ cm/s.

2) Nous devons utiliser le théorème de Bernoulli :

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + p_B .$$

Or on a $h_A = 0$ et o c :

$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right) + \rho g h_B$$

$$= \frac{1}{2}\rho V^2\left(\frac{R^4}{4r^4} - 1\right) + \rho g h_B .$$

A.N. : $p_A - p_B = 3{,}75\ \mathrm{Pa} + 2000\ \mathrm{Pa}$

$= 2003{,}75\ \mathrm{Pa}$.

3). Idem mais pour les points p_B et p_C :

$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + p_B = \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g h_C + p_C .$$

Or cette fois $v_B = v_C = v$, donc

$$p_B - p_C = \rho g (h_C - h_B)$$

A.N. : $p_B - p_C = 1000\ \mathrm{Pa}$.

4). $r_c = \alpha r$ $\quad a = 1,1$.

Il faut exploiter la loi de conservation du débit.

On veut toujours

$$Q_A = Q_B + Q_C$$

mais cette fois avec $Q_c = \pi r'^2 v$ et $Q_A = \pi R^2 V'$. Donc :

$$\pi R^2 V' = \pi r^2 v + \pi r'^2 v$$

$$\Leftrightarrow V' = \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{r'^2}{R^2}\right) v = \frac{r^2}{R^2} v \left(1 + \alpha^2\right)$$

$$\Rightarrow V' = \frac{1+\alpha^2}{2} V.$$

A.N. : $V' = 5,53$ cm/s