

**BA1 en Sciences Biomédicales et Médecine Vétérinaire****Examen****Nom:****Prénom:****Matricule:****Section:**

Q1: /12	Q2: /14	Q3: /9	Q4: /8
---------	---------	--------	--------

**Instructions:**

L'usage de document n'est pas autorisé. L'examen dure 2 heures et 15 minutes. Il y a 4 questions. Vous êtes responsables de vérifier que cet examen comporte bien 10 pages. Vous n'êtes pas autorisés à dégraffer les pages de l'examen. Vous êtes autorisés à utiliser une calculatrice (pas de smartphone). Un aide-mémoire vous est fourni à la fin de ce document. Justifiez bien toutes vos réponses.

Les valeurs numériques peuvent être arrondies au 2e chiffre significatif. Sauf indication contraire, tous les résultats numériques doivent être exprimés dans les unités du Système International. Vous pouvez prendre  $g = 10m/s^2$  et  $\rho_0 = 1000kg/m^3$ .

Lorsqu'il vous est demandé de dessiner une force sur un schéma, on demande que la direction et le sens soient le plus précis possible, mais la norme ne doit pas nécessairement être à l'échelle.

Veillez répondre à chaque question dans l'espace prévu à cet effet après chaque énoncé. S'il vous manque de la place, vous pouvez faire référence au verso d'une des feuilles d'examen pour indiquer où se trouve votre réponse. Veillez à indiquer *très clairement* si vous recourez à ce système. Enfin, le verso des feuilles d'examen peut-être également utilisé comme brouillon pour vos calculs et raisonnements.

**Note finale:** Le nombre total de points, sur les 4 questions, s'élève à 43 points. Le nombre de points obtenus est rapporté sur 20, et la note de l'examen est alors obtenue en arrondissant à l'entier le plus proche.

QUESTION 1: (12 points)

On considère une petite balle de masse  $M$  lancée depuis un point au sol,  $O$ , dans le champ de pesanteur. La vitesse initiale de la balle,  $\vec{v}_0$ , fait un angle  $\theta$  avec l'horizontale. Au même moment, un petit train démarre au niveau du sol, à une distance  $d$  de  $O$ , et s'éloigne de  $O$  avec une vitesse constante de norme  $V_0$ . Le but de cette question est de déterminer  $V_0$  tel que le train intercepte la balle, en considérant le train comme étant un corps ponctuel.

Nous utilisons le système d'axes  $x, z$  tel que présenté sur la figure 1. On note  $v_0$  la norme de  $\vec{v}_0$  et  $g$  la norme du vecteur d'accélération gravitationnelle  $\vec{g}$ . Les valeurs numériques des paramètres  $v_0, \theta$  et  $d$  seront données pour l'application numérique en fin de question.

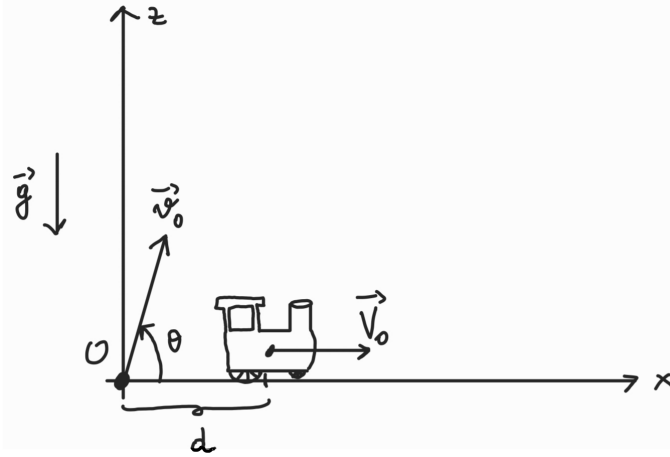


Figure 1: Une balle est lancée depuis le point  $O$  sur un train en mouvement.

1. (1pt) Exprimer les composantes  $x$  et  $z$  du vecteur d'accélération gravitationnelle  $\vec{g}$  en fonction de  $g$ .
  
2. (2pt) Exprimer les composantes  $x$  et  $z$  de la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  en fonction de  $v_0$  et  $\theta$ .
  
3. (2pt) On note  $x_B(t)$  et  $z_B(t)$  les coordonnées de la position de la balle au temps  $t$ . Que valent ces composantes en fonction des paramètres du problème, pour n'importe quelle valeur de  $t$ ?
  
4. (2pt) Même question que ci-dessus, mais avec les coordonnées  $x_T(t)$  et  $z_T(t)$  du train.

5. (4pt) On note  $t_*$  le temps auquel l'impact a lieu, et  $x_*$  la position sur l'axe des  $x$  correspondante. Déterminer  $t_*$  et  $x_*$  en fonction de  $v_0$ ,  $\theta$  et  $g$  ainsi que la valeur que doit avoir  $V_0$  en fonction de  $v_0$ ,  $\theta$ ,  $g$  et  $d$  afin que ceci soit possible.

6. (1pt) Application numérique:  $v_0 = 120\text{km/h}$ ,  $\theta = \pi/5\text{rad}$  et  $d = 53\text{mm}$ . Que vaut  $V_0$  avec ces valeurs?

QUESTION 2: (14 points)

On considère une tige rigide de masse négligeable et de longueur  $L$ . A l'une de ses extrémités, une petite boule de taille négligeable et de masse  $M$  est attachée. La tige est posée sur le sol et s'appuie sur un mur, la boule étant en contact avec le mur. Voir figure 2 pour un récapitulatif.

On appelle  $O$  le point de contact entre le mur et la boule. Le système est supposé être à l'équilibre. On note  $\alpha$  l'angle que fait la tige avec l'horizontale. Nous utilisons de plus les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  comme indiqué sur la figure 2.

Afin de fixer les notations pour les forces, on utilisera  $\vec{N}_{\text{mur}}$  pour la réaction du mur,  $\vec{N}_{\text{sol}}$  pour la réaction du sol,  $\vec{P}$  pour le poids et  $\vec{F}$  pour la force de frottement présente entre la tige et le sol. On note comme toujours  $\vec{g}$  le vecteur d'accélération gravitationnelle, et on considère qu'il n'y a pas de frottement entre la boule et le mur.

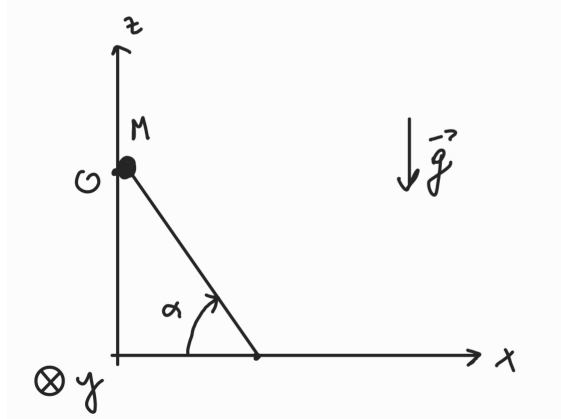


Figure 2: Une masse est attachée à une tige qui s'appuie contre un mur.

1. (1pt) Représenter sur la figure 2 toutes les forces agissant sur la tige, en prenant soin de localiser les vecteurs en leur point d'application.
2. (4pt) Exprimer les composantes suivant  $x$ ,  $y$  et  $z$  de ces forces en fonction de leur norme.
3. (3pt) En utilisant la loi de Newton appropriée, déterminer  $N_{\text{mur}}$  et  $N_{\text{sol}}$  en terme de  $M$ ,  $g$  et  $F$ .
4. (1pt) Que vaut le moment de force en  $O$  de  $\vec{N}_{\text{sol}}$  en fonction des paramètres du problème?

5. (1pt) Même question pour la force de frottement  $\vec{F}$ .

6. (2pt) En utilisant la condition d'équilibre appropriée, déterminer la force de frottement en fonction des paramètres  $M$ ,  $g$  et  $\alpha$ .

7. (2pt) Que doit valoir, au minimum, le coefficient de frottement statique  $\mu$  entre la tige et le sol pour que ce système soit bien à l'équilibre?

QUESTION 3: (9 points)

On considère une bassine dont le fond est d'aire  $A$  et les bords, verticaux, ont une hauteur  $H$ . La bassine est remplie d'eau jusqu'à une hauteur  $h$ ,  $h$  étant plus petit que  $H$ , et on note  $p_{\text{atm}}$  la pression atmosphérique. Voir figure 3.

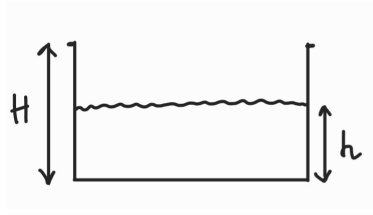


Figure 3: Une bassine partiellement remplie d'eau.

1. (2pt) Quelle est la pression  $p$  au fond de la bassine en fonction des paramètres du problème?

2. (1pt) Quelle est la force totale  $F$  exercée par l'eau sur le fond de la bassine en fonction de la pression  $p$  et des paramètres du problème?

On ajoute maintenant un petit bloc de masse  $M$  et de volume  $V$  dans la bassine, voir figure 4. On note  $\Delta h$  l'augmentation de la hauteur du niveau de l'eau dans la bassine. Le niveau d'eau est donc maintenant à  $h + \Delta h$ .

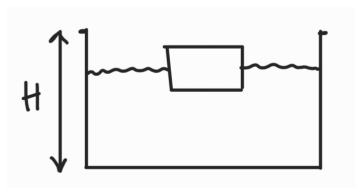


Figure 4: On ajoute un bloc dans la bassine.

3. (2pt) A quelle condition sur  $M$  et  $V$  le bloc flotte-t-il? Justifiez bien votre raisonnement en utilisant les lois appropriées.

4. (1pt) Quelle est la force totale  $F'$  exercée par l'eau sur le fond de la bassine? Exprimez votre réponse en fonction de  $M$  et de la pression  $p$  que l'on avait avant d'ajouter le bloc.
5. (2pt) En calculant la pression  $p'$  au fond de la bassine, déterminer la valeur de l'augmentation de la hauteur d'eau  $\Delta h$  en fonction de  $M$ ,  $A$  et la densité de l'eau.
6. (1pt) En supposant que l'on dispose d'autant de petits blocs, de taille, forme et masse que l'on désire, quelle est la valeur maximale  $p_{\max}$  que pourra atteindre la pression de l'eau au fond de la bassine?

QUESTION 4: (8 points)

On considère un astronaute explorant une planète sur laquelle l'accélération gravitationnelle  $g_P$  est plus intense que sur Terre. Le but de cette question est d'évaluer, dans un modèle simple, à quelles conditions le sang de cet astronaute sera ou non capable de circuler jusqu'à son cerveau.

On suppose pour simplifier la discussion que le sang est un fluide parfait incompressible et que son écoulement est non-turbulent et satisfait à la conservation de la masse. L'astronaute est debout, et on note  $A$  un point au niveau du coeur et  $B$  un point au niveau du cerveau, voir figure 5 pour un récapitulatif. On note  $z_A$ ,  $z_B$ ,  $p_A$ ,  $p_B$ ,  $v_A$  et  $v_B$  respectivement les coordonnées, pressions et vitesses sanguines correspondantes aux points  $A$  et  $B$ . Enfin, la densité volumique de masse du sang est notée  $\rho$ .

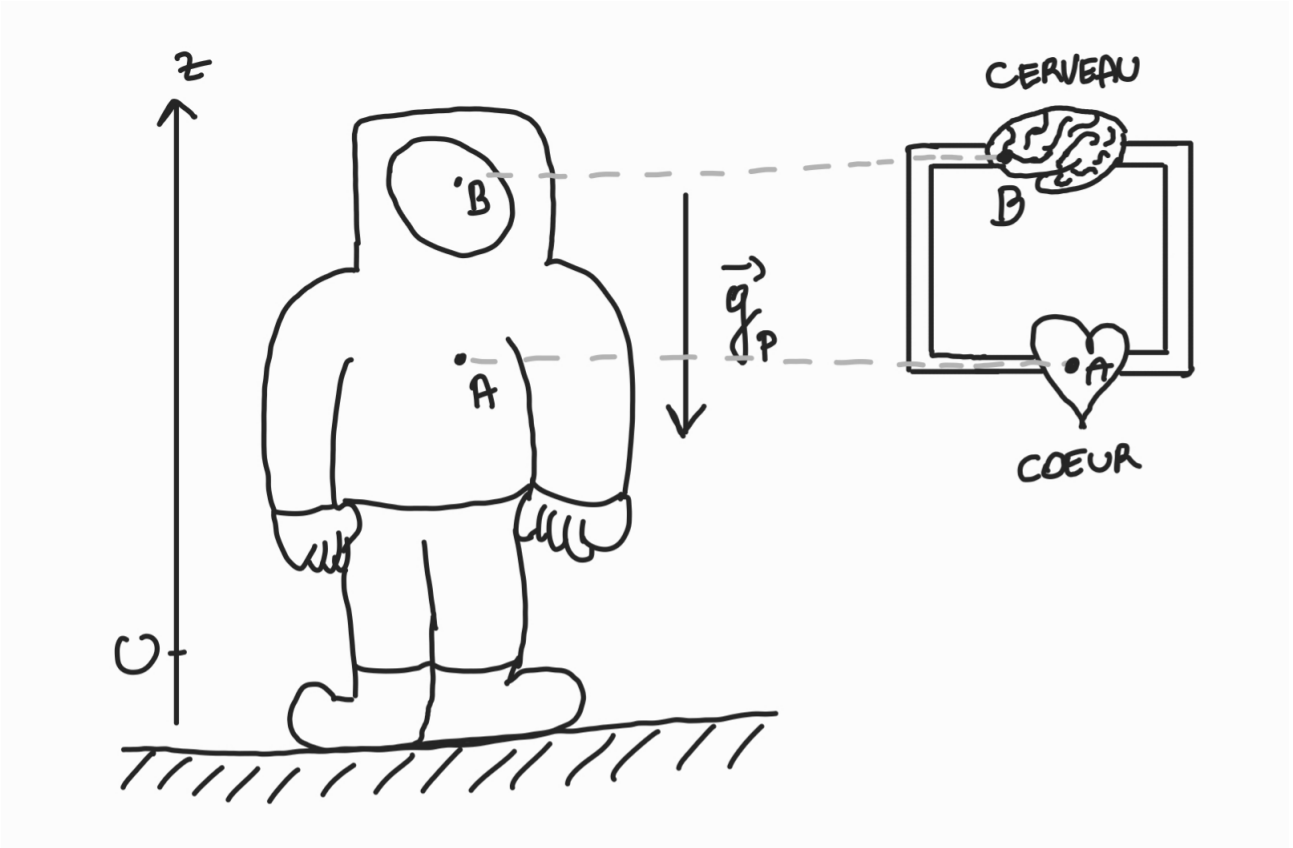


Figure 5: Un astronaute dans un champ de gravitation extraterrestre, avec les points  $A$  et  $B$  tels que décrit ci-dessus.

1. (2pt) Que vaut la vitesse du fluide au point  $B$  en fonction des autres paramètres du problème, à savoir  $z_A$ ,  $z_B$ ,  $p_A$ ,  $p_B$  et  $v_A$ ?



2. (2pt) Quelle est la valeur maximale  $g_{P, \max}$  que  $g_P$  peut prendre pour que le sang continue de circuler dans le cerveau?
  
3. (1pt) Application numérique: calculer  $g_{P, \max}$  avec les valeurs suivantes pour les paramètres:  $v_A = 3m/s, p_A = 13,3 \text{ kPa}, p_B = 9,3 \text{ kPa}, z_A = 150cm, z_B = 180cm, \rho = 1056kg/m^3$ . (Si vous ne parvenez pas à trouver la réponse, vous pouvez prendre  $g_{P, \max} = 30m/s^2$  dans la suite.)
  
4. (2pt) Si on suppose que la planète a un rayon égal à celui de la Terre, quelle est la masse maximale de cet astre correspondant à  $g_{P, \max}$ ? Donner la valeur numérique.
  
5. (1pt) Le sang n'est en réalité pas un fluide parfait. Les effets de la viscosité vont-ils augmenter ou diminuer la valeur de  $g_{P, \max}$ ? Il n'est pas nécessaire de faire des calculs pour répondre à cette question, mais justifiez bien votre raisonnement à l'aide d'arguments physiques.

AIDE-MÉMOIRE

$$\frac{GM}{R_T^2} = 10m/s^2$$

$$R_T = 6400km$$

$$1atm = 101325Pa$$

$$\rho_0 = 1000kg/m^3$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

$$g = 10m/s^2$$

$$\frac{d \sin(ax)}{dx} = a \cos(ax)$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = AB \sin \theta$$

$$F_f^{\max} = \mu N$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{adjacent}}{H}$$

$$Q = Av$$

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

$$P = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r}$$

$$A = \pi R^2$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$