Examen Août 20203 – BV

Q1 1. $\vec{g} = (0, -g)$ $\quad g = 10\ m/s^2$

2. $\vec{v}_1 = v_1 (\cos\theta_1, -\sin\theta_1)$

3. $\begin{cases} x_1(t) = v_1 \cos\theta_1\, t \\ z_1(t) = -v_1 \sin\theta_1\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2(t) = L \\ z_2(t) = h - H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1(t_c) = x_2(t_c) \\ z_1(t_c) = z_2(t_c) > -H \end{cases}$ coord. du sol.

$\Rightarrow$ on veut donc

$$h - H - \frac{1}{2} g t_c^2 > -H$$

$$h > \frac{1}{2} g t_c^2 \iff t_c < \sqrt{2h/g}$$

$\Rightarrow$ valeur maximale de t_c :

$$t_{max} = \sqrt{2h/g}.$$

A.N. : $t_{max} = 1.34 \text{ s}.$

5. $\begin{cases} v_1 \cos\theta_1 = L/t_c \\ -v_1 \sin\theta_1 = (h-H)/t_c \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \tan\theta_1 = \dfrac{H-h}{L} \\ v_1 = \sqrt{\dfrac{L^2}{t_c^2} + \dfrac{(H-h)^2}{t_c^2}} \end{cases}$

A.N. : $\begin{cases} \theta_1 = 40.6° \\ v_1 = 13.2 \text{ m/s} \end{cases}$

Hauteur par rapport au sol $h_c = H + z_2(t_c)$

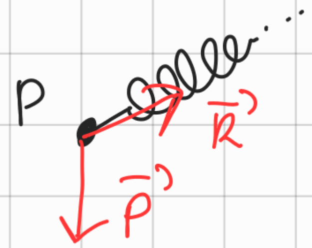
Or $z_2(t_c) = h - H - \frac{1}{2} g t_c^2$, donc

$h_c = h - \frac{1}{2} g t_c^2$

A.N. : $h_c = 6.55 \text{ m}$

Q2 1. $\ell = L \sin\alpha$

2.



$\vec{P} = m\vec{g}$ (poids)

$\vec{R}$ = f. de rappel du ressort.

3. $\vec{R} = R\,(\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha)$

$R = ke$

$\Rightarrow \vec{R} = ke\,(\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha)$

4. $\vec{F} = \vec{R} + \vec{P} = m\vec{a}$

MCU $\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2\,\vec{CP}$

avec $\vec{CP} = (-\ell, 0, 0)$

$\Rightarrow (ke\sin\alpha,\ 0,\ ke\cos\alpha - mg)$

$= (m\omega^2\ell,\ 0,\ 0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} ke\sin\alpha = m\omega^2\ell \\ ke\cos\alpha = mg \end{cases}$$

Or $\ell = L\sin\alpha$, donc :

$$\begin{cases} ke = m\omega^2 L \\ ke\cos\alpha = mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e = \dfrac{m\omega^2 L}{k} \\ \alpha = \arccos\left(\dfrac{g}{\omega^2 L}\right) \end{cases}$$

A.N. : $e = 2$ cm

$\alpha = 38.6°$

5. On veut toujours que $\cos\alpha \leq 1$.

Donc $\dfrac{g}{\omega^2 L} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \quad \omega \geq \sqrt{g/L}$$

$$\Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{g/L} = 1.06\,\pi\,rad/s.$$

Q3 1. $\vec{F} = \vec{0}$ où $\vec{F} = \vec{N}_A + \vec{N}_B + m_1\vec{g} + m_2\vec{g}$

$$\Rightarrow \vec{N}_A + \vec{N}_B = -(m_1 + m_2)\vec{g}$$

A.N. : $\vec{N}_A + \vec{N}_B = (0, 0, 1410\ N)$

2. $\vec{\tau}_{C_{G_2}}(\vec{N}_A) = \overrightarrow{C_{G_2}A} \times \vec{N}_A$

On a :

$$\overrightarrow{C_{G_2}A} = -\overrightarrow{AC_{G_2}} = \left(-\frac{L}{3}, 0, -\frac{H}{2}\right).$$

Donc $\vec{\tau}_{C_{G_2}}(\vec{N}_A) = \left(0, \frac{L}{3}N_A, 0\right)$.

3. $\vec{\tau}_{C_{G_2}}(\vec{N}_B) = \overrightarrow{C_{G_2}B} \times \vec{N}_B$

$$\overrightarrow{C_{G_2}B} = \overrightarrow{C_{G_2}A} + \overrightarrow{AB}$$
$$= -\left(\frac{L}{3}, 0, \frac{H}{2}\right) + (L, 0, 0)$$
$$= \left(\frac{2L}{3}, 0, -\frac{H}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{C_{G_2}}(\vec{N}_B) = \left(0, -\frac{2L}{3}N_B, 0\right)$$

4. $\vec{\tau}_{C_{G_2}} = \vec{0}$.

On a besoin aussi de

$$\vec{\tau}_{C_{G_2}}(m_1\vec{g}) = \overrightarrow{C_{G_2}C_{G_1}} \times (m_1\vec{g})$$

Or $\overrightarrow{C_{G_2}C_{G_1}} = \overrightarrow{C_{G_2}B} + \overrightarrow{BC_{G_1}}$

$$= \left(\frac{2L}{3}, 0, -\frac{H}{2}\right) + (-l, 0, H)$$

$$= \left(\frac{2L}{3} - l, 0, \frac{H}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{C_{G_2}}(m_1\vec{g}) = \left(0, \left(\frac{2L}{3} - l\right) m_1 g, 0\right)$$

[Signe de $\frac{2L}{3} - l$?

$L = 80$ cm $\quad l = 85$ cm

$\Rightarrow \frac{2L}{3} = 53.3$ cm

$\Rightarrow \frac{2L}{3} - l < 0$.

Donc $\vec{\tau}_{C_{G_2}}(m_1\vec{g})$ est bien $\odot$]

Evidement, $\vec{\tau}_{C_{G_2}}(m_2\vec{g}) = \vec{0}$.

Donc $\vec{\tau}_{C_{G_2}} = \vec{0}$ implique :

$$\frac{L}{3} N_A - \frac{2L}{3} N_B + \left(\frac{2L}{3} - \ell\right) m_1 g = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_A = 2 N_B + \left(\frac{3\ell}{L} - 2\right) m_1 g$$

Avec 1. on a : $N_A + N_B = (m_1 + m_2) g$,

donc $N_B = (m_1 + m_2) g - N_A$, et donc

$$N_A = 2(m_1 + m_2) g - 2 N_A + \left(\frac{3\ell}{L} - 2\right) m_1 g$$

$\Leftrightarrow$

$$N_A = \frac{2}{3}(m_1 + m_2) g + \left(\frac{\ell}{L} - \frac{2}{3}\right) m_1 g$$

$$= g\left(\frac{\ell}{L} m_1 + \frac{2}{3} m_2\right).$$

$$\Rightarrow N_B = (m_1 + m_2) g - N_A$$

$$= \left[(m_1 + m_2) - \frac{\ell}{L} m_1 - \frac{2}{3} m_2\right] g$$

$$= \left[\left(1 - \frac{\ell}{L}\right) m_1 + \frac{1}{3} m_2\right] g$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_A = \left(\frac{\ell}{L} m_1 + \frac{2}{3} m_2\right) g = 1230 \text{ N} \\ N_B = \left(\left(1 - \frac{\ell}{L}\right) m_1 + \frac{1}{3} m_2\right) g = 181 \text{ N} \end{cases}$$

5. $$\overrightarrow{AC_G} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 \overrightarrow{AC_{G_1}} + m_2 \overrightarrow{AC_{G_2}}\right)$$

Or $$\overrightarrow{AC_{G_1}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_{G_1}}$$

$$= (L, 0, 0) + (-\ell, 0, H)$$

$$= (L - \ell, 0, H)$$

donc

$$\overrightarrow{AC_G} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 (L - \ell, 0, H) + m_2 \left(\frac{L}{3}, 0, \frac{H}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 (L - \ell) + \frac{m_2}{3} L, 0, \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right) H\right).$$

Q4 $m_N = 1.7 \times 10^{-27}$ kg $\quad m_u = 3.9 \times 10^{-25}$ kg

1. $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \qquad v = 2 \cdot 10^3$ m/s

$\Rightarrow E_c = 3.4 \times 10^{-21}$ J.

2. Conservation de l'impulsion :

$$m_N v = (m_N + m_u) V$$

$$\Rightarrow V = \frac{m_N}{m_N + m_u} v = \frac{v}{1 + m_u/m_N}$$

A.N. : $m_u / m_N = \frac{3.9}{1.7} \times 10^2 = 230$

$$\Rightarrow V = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ m/s}}{2.31 \times 10^2} = 8.6 \text{ m/s}$$

3. $E_c' =$ énergie cin. totale après la collision.

$$= \frac{1}{2} (m_N + m_u) V^2$$

$$= 1.9 \times 10^{-25} \text{ k} \times 74 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J}.$$

$$\Rightarrow E_c' - E_c = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J} - 3.4 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$\simeq -3.4 \times 10^{-21} \text{ J}.$$

$\Rightarrow$ Energie dissipée $= 3.4 \times 10^{-21}$ J.

Or on observe 3.2×10^{-11} J, donc l'énergie dissipée par la collision n'explique certainement pas une telle observation expérimentale !