

## BA1 en Sciences Biomédicales et Médecine Vétérinaire

**Examen****Nom:****Prénom:****Matricule:****Section:**

Q1: /9	Q2: /14	Q3: /16
Q4: /10	Q5: /7	Q6: /9

**Instructions:**

L'usage de documents n'est pas autorisé. L'examen dure 3 heures. Il y a 6 questions. Vous êtes responsables de vérifier que cet examen comporte bien 14 pages. Vous n'êtes pas autorisés à dégraffer les pages de l'examen. Vous êtes autorisés à utiliser une calculatrice (pas de smartphone). Un aide-mémoire vous est fourni à la fin de ce document. Vous pouvez utiliser les résultats du cours théorique sans démonstration, mais pour le reste justifiez bien toutes vos réponses.

Les valeurs numériques peuvent être arrondies au 2e chiffre significatif. Sauf indication contraire, tous les résultats numériques doivent être exprimés dans les unités du Système International. Vous pouvez prendre  $g = 10m/s^2$  et  $\rho_0 = 1000kg/m^3$ .

Lorsqu'il vous est demandé de dessiner une force sur un schéma, on demande que la direction et le sens soient le plus précis possible, mais la norme ne doit pas nécessairement être à l'échelle.

Veillez répondre à chaque question dans l'espace prévu à cet effet après chaque énoncé. S'il vous manque de la place, vous pouvez faire référence au verso d'une des feuilles d'examen pour indiquer où se trouve votre réponse. Veillez à indiquer *très clairement* si vous recourez à ce système. Enfin, le verso des feuilles d'examen peut-être également utilisé comme brouillon pour vos calculs et raisonnements.

**Note finale:** Le nombre total de points, sur les 6 questions, s'élève à 65 points. Le nombre de points obtenus est rapporté sur 20, et la note de l'examen est alors obtenue en arrondissant à l'entier le plus proche.

QUESTION 1: (9 points)

On considère deux corps ponctuels dans le champ de pesanteur. Le corps 1 est lancé depuis le point  $O$ , au sol, avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$ , dont la norme  $v_0$  et l'angle  $\theta$  formé avec l'horizontale sont inconnus. Au même instant, le corps 2 est lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur  $h$  et à une distance  $L$  de  $O$  le long de l'axe  $Ox$ .

Le but de cette question est de déterminer les valeurs de  $v_0$  et  $\theta$  tels que les deux corps entrent en collision avec le sol au même moment et au même endroit.

On se réfère à la figure 1 pour le système d'axes  $Oxz$  à utiliser dans cette question.

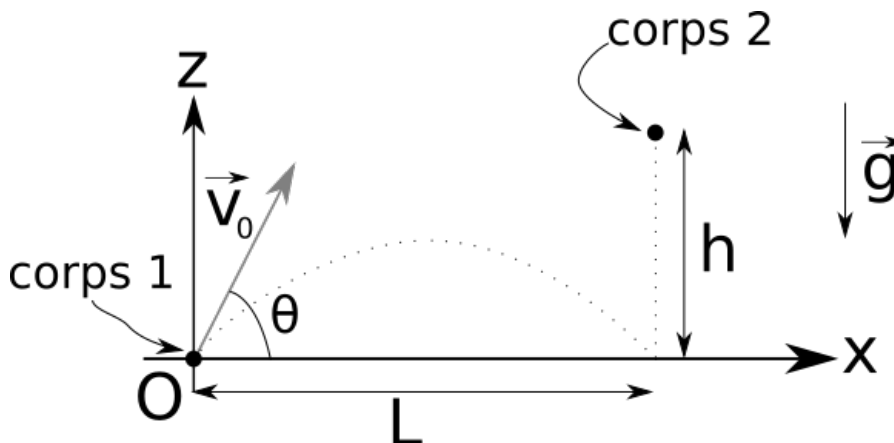


Figure 1: Le corps 1 est lancé depuis le point  $O$ , et au même instant le corps 2 est lâché comme expliqué dans le texte.

1. (1pt) Donner les composantes du vecteur d'accélération gravitationnelle  $\vec{g}$ .
2. (1pt) Exprimer les composantes du vecteur de vitesse initiale  $\vec{v}_0$  en fonction de la norme  $v_0$  et de  $\theta$ .
3. (1pt) Que valent les composantes  $x_1(t)$  et  $z_1(t)$  du vecteur position  $\vec{r}_1(t)$  du premier corps? Exprimer le résultat en fonction de  $g$  et des inconnues  $v_0$  et  $\theta$ .
4. (1pt) Que valent les composantes  $x_2(t)$  et  $z_2(t)$  du vecteur position  $\vec{r}_2(t)$  du second corps? Exprimer le résultat en fonction de  $g$  et des paramètres  $h$  et  $L$ .

5. (5pt) Déterminer les valeurs que doivent prendre les inconnues  $v_0$  et  $\theta$  pour que la collision ait lieu, ainsi que l'instant  $t_c$  correspondant. Exprimer vos réponses en fonction des paramètres du problème  $h$ ,  $L$  et  $g$ .

QUESTION 2: (14 points)

On considère deux blocs de masses  $m_1$  et  $m_2$  reliés par une corde de masse négligeable, les blocs étant considérés comme des corps ponctuels. Le premier bloc est posé sur une table, et le second est suspendu à la corde qui passe par une poulie de masse négligeable, voir figure 2 pour un récapitulatif.

On note respectivement  $\mu_s$  et  $\mu_d$  les coefficients de frottements statique et dynamique entre le premier bloc et la surface de la table.

Cette question comporte deux parties: dans la première, le système est supposé être immobile et dans la seconde il ne l'est plus, le premier bloc se déplaçant vers la poulie et le second se rapprochant du sol. Dans toute cette question, on suppose que la corde est toujours tendue et on note  $T$  sa tension.

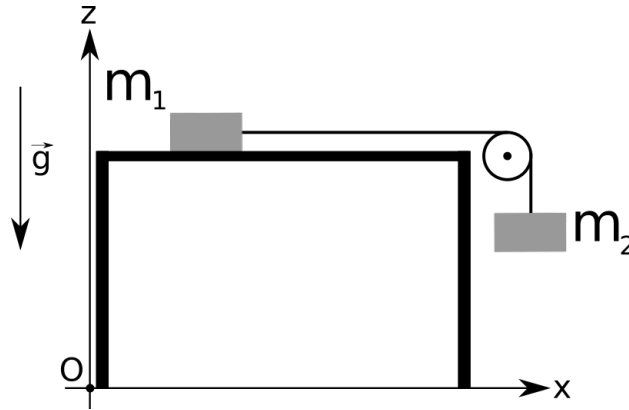


Figure 2: Deux masses sont reliées par une corde passant par une poulie.

*Première partie: Système immobile*

1. (2pt) Représenter sur la figure 2 toutes les forces s'exerçant sur chacun des blocs.
2. (5pt) Que valent la norme de la force de frottement statique  $F_s$  et la tension  $T$  dans la corde? Exprimer la réponse en fonction des paramètres du problème.
3. (2pt) Quelle est la valeur maximale que peut prendre  $m_2$  afin que le système reste à l'équilibre?



QUESTION 3: (16 points)

On considère une balançoire à bascule formant un angle  $\alpha = 13^\circ$  avec l'horizontale schématisée sur la figure 3. Sur la partie basse de la balançoire, à une distance  $L = 1.5m$  du point pivot, se trouve un corps ponctuel de masse  $m = 12kg$ . Son extrémité est en appui sur le sol, et on note  $\vec{N}$  la force exercée par le sol sur la balançoire. Sur la partie haute, à une distance  $d = 10cm$  du point pivot, se trouve un corps ponctuel de masse  $M = 20kg$ . La balançoire et le corps de masse  $m$  sont immobiles, tandis que  $M$  s'éloigne du point pivot à une vitesse constante de norme  $v = 20cm/s$  et parallèle à la balançoire.

Dans toute cette question, on vous demande d'utiliser le système d'axes  $Oxyz$  de la figure 3, le point  $O$  étant pris sur le pivot. De plus, on néglige la masse de la balançoire ainsi que les frottements au point pivot.

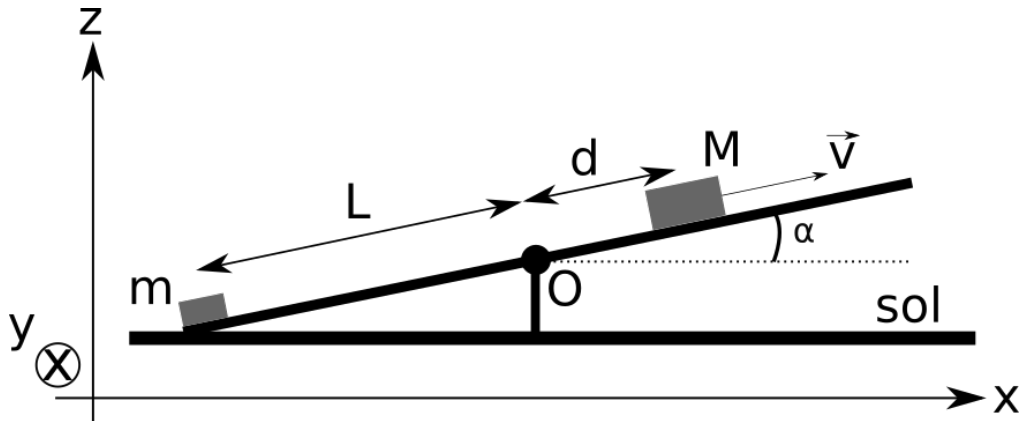


Figure 3: La masse de gauche,  $m$ , est fixée à la balançoire, mais la masse  $M$  se déplace en s'éloignant du point pivot  $O$ .

1. (6pt) Déterminer le vecteur moment de force par rapport à  $O$  du poids du corps de masse  $M$ , du poids du corps de masse  $m$ , et de la force normale  $\vec{N}$ .
  
2. (3pt) En considérant la condition d'équilibre appropriée, déterminer le vecteur  $\vec{N}$ . Que vaut la valeur numérique de sa norme?

3. (3pt) Que vaut la force  $\vec{N}_P$  exercée par le pivot sur la balançoire?

4. (4pt) Après combien de temps la balançoire se met-elle en mouvement? Donner la valeur numérique.

QUESTION 4: (10 points)

On considère un corps ponctuel de masse  $M$  entrant en collision avec un corps ponctuel de masse  $m$ . Avant la collision, la vitesse  $\vec{V}$  du premier corps est dirigée vers la droite sur la figure 4 et celle du second corps, notée  $\vec{v}$ , est dirigée vers le haut. Après la collision, on suppose que les deux corps fusionnent en un seul corps ponctuel de masse  $M + m$ , et on note  $\vec{V}'$  sa vitesse. L'angle formé par  $\vec{V}'$  et l'horizontale est noté  $\alpha$ . On néglige les effets de frottement et de la gravitation dans ce problème.

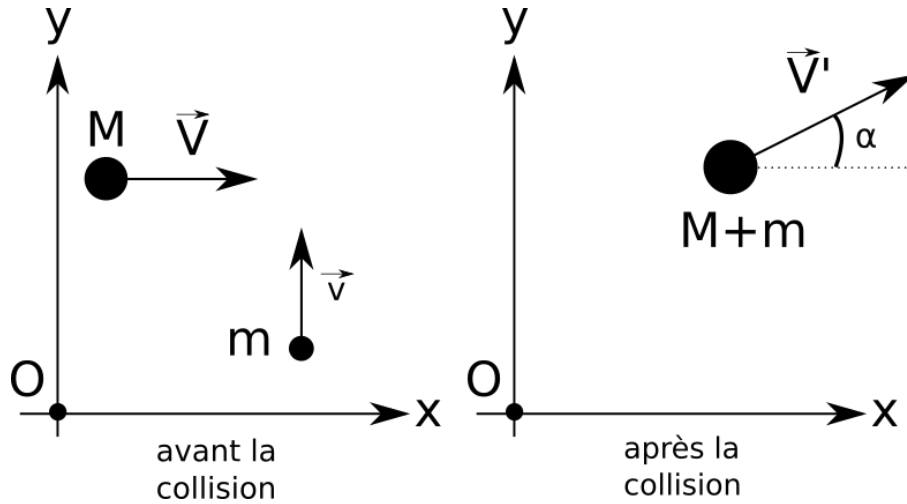


Figure 4: Deux corps de masse  $M$  et  $m$  entrent en collision. Après la collision, ils ont fusionné en un corps ponctuel de masse  $M + m$ .

1. (1pt) Exprimer  $\vec{V}'$  en fonction de sa norme  $V'$  et de l'angle  $\alpha$ .
2. (4pt) En utilisant le théorème de conservation approprié vu au cours, déterminer l'angle  $\alpha$  ainsi que  $V'$  en fonction de  $M, m, V$  et  $v$ .



3. (3pt) Que vaut la variation  $\Delta E_C$  de l'énergie cinétique lors de cette collision? Exprimer votre réponse en fonction de  $M, m, V$  et  $v$ . *Nous vous conseillons de simplifier au maximum votre réponse pour  $\Delta E_C$ .*

4. (2pt) Peut-on ajuster la valeur de  $v$  telle que cette collision soit élastique? Si oui, trouver cette valeur. Si non, démontrer pourquoi.

QUESTION 5: (7 points)

On considère un cylindre de masse  $m$ , hauteur  $h$  et rayon  $r$ , immergé dans l'eau et attaché au centre  $P$  de sa face inférieure à un ressort de constante de rappel  $k$ . Le ressort, à son autre extrémité, est fixé au fond du contenant au point  $O$ . On note  $H$  le niveau de l'eau et  $P_0$  la position d'équilibre du ressort. Dans la première partie de ce problème, on suppose que le cylindre est totalement immergé, et dans la deuxième partie il ne l'est que partiellement et on note  $h_i$  la hauteur immergée du cylindre, voir figure 5 pour un récapitulatif. On suppose de plus que  $m/V$  est plus petit que la masse volumique de l'eau, où  $V$  est le volume du cylindre.

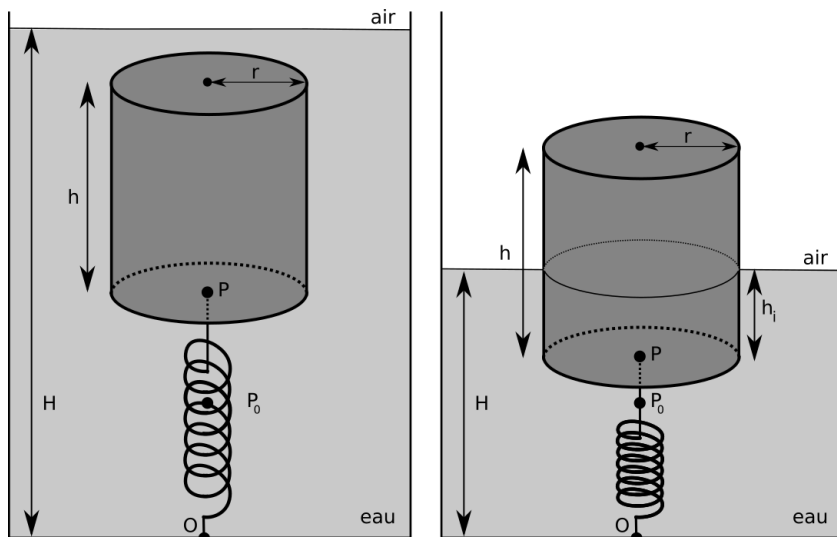


Figure 5: Un cylindre est immergé dans l'eau et attaché par le bas à un ressort. A gauche, il est totalement immergé et à droite il ne l'est que partiellement.

Afin de rendre les notations plus digestes, on pose  $e = \|\overrightarrow{P_0P}\|$  et  $\ell = \|\overrightarrow{OP_0}\|$ .

*Première partie: cylindre totalement immergé*

1. (2pt) En utilisant la condition d'équilibre appropriée, déterminer l'élongation  $e$  du ressort en fonction des paramètres du problème.
  
2. (1pt) L'élongation  $e$  étant une norme, elle doit être toujours positive. Pourquoi ceci est-il vrai pour la formule trouvée au point précédent?

*Deuxième partie: cylindre partiellement immergé*

3. (1pt) Exprimer  $h_i$  en fonction de  $H, \ell$  et  $e$ .

4. (3pt) Déterminer l'élongation  $e$  du ressort en fonction des paramètres du problème.

QUESTION 6: (9 points)

On considère un liquide non-visqueux et incompressible de masse volumique  $\rho = 1100\text{kg/m}^3$ , s'écoulant dans un circuit dont une portion est représentée sur la figure 6. Le point  $A$  est à l'entrée du circuit, où le rayon du conduit cylindrique est  $r_A = 1.2\text{cm}$  et la pression  $p_A$  y est inconnue. Au point  $B$ , situé à une hauteur de  $h_B = 2.3\text{m}$  par rapport au point  $A$ , le conduit a le même rayon qu'en  $A$ , et la pression vaut  $p_B = 15000\text{Pa}$ . Enfin, le point  $C$  est situé à une hauteur  $h_C = 30\text{cm}$  en-dessous du point  $A$ , le rayon  $r_C$  y est inconnu et la pression  $p_C = p_B$ . Le débit dans la conduite vaut  $Q = 0.6\text{L/min}$ .

L'écoulement est non-turbulent et on suppose que le débit total est conservé.

Attention, on ne considère ici qu'une partie du circuit: en aucun point le liquide n'est en contact avec l'air de l'atmosphère dans ce problème.

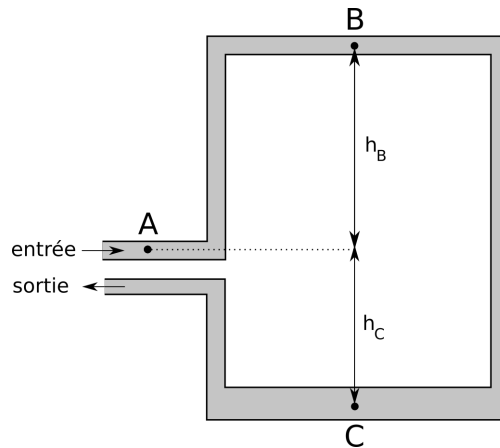


Figure 6: Le liquide circule dans la boucle suivant le sens  $A - B - C$ .

On demande déterminer numériquement les quantités suivantes:

1. (3pt) Les vitesses  $v_A$  et  $v_B$  du fluide en  $A$  et  $B$  respectivement.

2. (2pt) La pression  $p_A$  en  $A$ .

3. (2pt) La vitesse  $v_C$  et le rayon  $r_C$  de la conduite en  $C$ .

On suppose maintenant que l'on peut faire varier la pression en  $A$ .

4. (2pt) Quelle est la pression minimale que nous pouvons choisir pour  $p_A$  afin que le liquide puisse circuler dans ce système?

## AIDE-MÉMOIRE

$\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$	$\ \vec{A}\  = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$	$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$
$g = 10 \text{ m/s}^2$	$\frac{d \sin(ax)}{dx} = a \cos(ax)$	$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$
$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$	$\ \vec{A} \times \vec{B}\  = AB \sin \theta$	$v = \omega r$
$\cos \alpha = \frac{\text{adjacent}}{H}$	$F_s^{\text{max}} = \mu N$	$Q = Av$
$E_P = \frac{1}{2} k r^2$	$E_P = -m \vec{g} \cdot \vec{r}$	$W = \vec{f} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$
$A = \pi R^2$	$\Delta E = W$	

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$