PHYS-G1103 – Examen Janvier 2023

Correctif

Q1

1. $\vec{g} = (0, -g)$ où $g = 10\, m/s^2$.

2. $\vec{v}_0 = v_0 (\cos\theta, \sin\theta)$

3. $$\begin{cases} x_1(t) = v_0 \cos\theta \, t \\ z_1(t) = v_0 \sin\theta \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_2(t) = L \\ z_2(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

5. $$x_1(t_c) = L \, , \quad z_1(t_c) = 0$$

$$x_2(t_c) = L \, , \quad z_2(t_c) = 0$$

$$\Rightarrow v_0 \cos\theta \, t_c = L \, , \quad v_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g t_c = 0$$

$$h - \frac{1}{2} g t_c^2 = 0$$

Donc $\boxed{t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$ et on a les

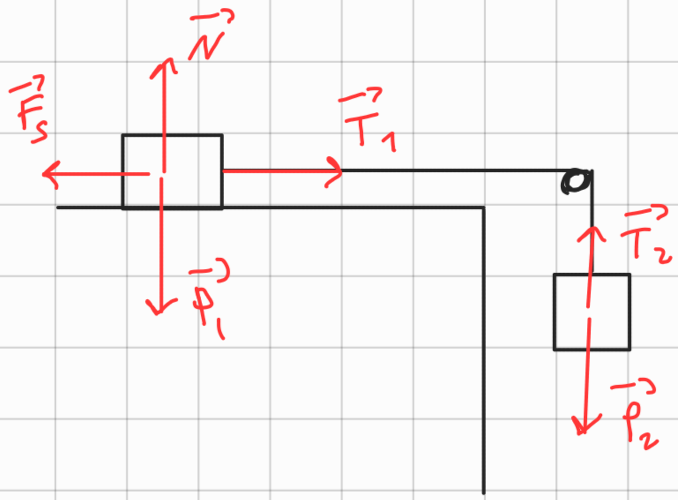
équations :

$$\begin{cases} v_0 \cos\theta = \dfrac{L}{t_c} = \sqrt{\dfrac{g}{2h}}\,L \\ v_0 \sin\theta = \dfrac{1}{2} g t_c = \dfrac{1}{2} g \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \sqrt{\dfrac{1}{2} g h} \end{cases}$$

d'où $$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{1}{2} g h + \frac{g}{2h} L^2}}$$

et $$\boxed{\tan\theta = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} g h}}{\sqrt{g/2h}\,L} = \frac{h}{L}.}$$

Q2

1. 

2. Blocs immobiles, donc :

$$\begin{cases} \vec{F_s} + \vec{N} + \vec{T_1} + \vec{P_1} = \vec{0} \\ \vec{T_2} + \vec{P_2} = \vec{0} \end{cases}$$

Avec les sens/orientations, on trouve :

$$N = P_1 \qquad F_s = T_1 \qquad T_2 = P_2$$

De plus : $T_1 = T_2 = T$ (corde tendue).

Donc

$$\boxed{T = m_2 g \qquad \text{et} \qquad F_s = m_2 g}$$

3. $F_s \leq \mu_s N = \mu_s m_1 g$, donc

$$m_2 g \leq \mu_s m_1 g$$

$\Rightarrow m_2 \leq \mu_s m_1$.

La valeur max de m_2 est donc

$$\boxed{\mu_s m_1.}$$

4. $F_d = \mu_d N$ et $N = P_1 = m_1 g$

donc $\boxed{F_d = \mu_d m_1 g}$

5. $\begin{cases} -F_d + T = m_1 a & (\vec{a}_1 \text{ vers la dte}) \\ -T + P_2 = m_2 a & (\vec{a}_2 \text{ vers le bas}) \end{cases}$

6. $-F_d + P_2 = (m_1 + m_2) a$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{(m_2 - \mu_d m_1) g}{m_1 + m_2}}$$

$$T = P_2 - m_2 a = m_2 (g - a)$$

$$= m_2 g \left(1 - \frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$= m_2 g \left(\frac{m_1 + \cancel{m_2} - \cancel{m_2} + \mu_d m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \mu_d)}$$

Alternative avec F_d :

$$\boxed{a = \frac{m_2 g - F_d}{m_1 + m_2}}$$

$$T = m_1 a + F_d = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(m_2 g - F_d\right) + F_d$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} g + F_d \left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} g + \frac{m_2}{m_1+m_2} F_d$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(m_1 g + F_d\right)}$$

Vérification :

$$T = \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(m_1 g - \mu_d m_1 g\right)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} g \left(1 + \mu_d\right) \rightsquigarrow \text{ok}$$

Q3

1. $\vec{\tau}_O(m\vec{g}) = mgL\cos\alpha\,(0,-1,0)$

$\vec{\tau}_O(M\vec{g}) = Mgd\cos\alpha\,(0,1,0)$

$\vec{\tau}_O(\vec{N}) = NL\cos\alpha\,(0,1,0)$

2. $\vec{N}$ telle que

$$\vec{\tau}_O = \vec{0}.$$

On a $\vec{\tau}_O(\vec{N}_p) = \vec{0}$ donc

$$mgL\cos\alpha = Mgd\cos\alpha + NL\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{N = \left(m - \frac{d}{L}M\right)g}$$

Valeurs numériques:

$m = 12\,kg$, $M = 20\,kg$, $L = 1.5\,m$, $d = 10\,cm$,

$g = 10\,m/s^2$ $\Rightarrow \boxed{N = 106.7\,N}$

Sens : $\boxed{\text{vers le haut}}$, donc

$$\vec{N} = -\left(m - \frac{d}{L}M\right)\vec{g}.$$

3. $\vec{F}$ = force totale sur le système "balançoire + m + M" $= \vec{0}$.

Donc

$$m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{N} + \vec{N}_p = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{N}_p = -m\vec{g} - M\vec{g} + \left(m - \frac{d}{L}M\right)\vec{g}$$

$$= -\left(1 + \frac{d}{L}\right)M\vec{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_p = \left(1 + \frac{d}{L}\right)Mg}$$

Sens : $\boxed{\text{vers le haut}}$.

4. Mouvement ? si $\vec{N}$ s'annule !

("décolle du sol").

La distance d est remplacée par $d + vt$ lorsque t augmente.

Donc on veut

$$m - \frac{d + vt}{L} M = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad d + vt = \frac{m}{M} L$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{t = \frac{1}{v}\left(\frac{m}{M} L - d\right)}$$

Numériquement :

$v = 20\,m/s$, $m = 12\,kg$, $M = 20\,kg$

$L = 1.5\,m$, $d = 10\,cm$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 4\,s.}$$

Q4

1. $\vec{V}' = V'(\cos\alpha, \sin\alpha)$

2. Conservation de l'impulsion :

$$M\vec{V} + m\vec{v} = (m+M)\vec{V}'$$

On a

$$\vec{V} = (V, 0) \qquad \vec{v} = (0, v)$$

Donc :

$$\begin{cases} MV = (m+M)V'\cos\alpha \\ mv = (m+M)V'\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V'\cos\alpha = \dfrac{M}{m+M} V \\ V'\sin\alpha = \dfrac{m}{m+M} v \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} V' = \dfrac{1}{m+M}\sqrt{M^2V^2 + m^2v^2} \\ \tan\alpha = \dfrac{m}{M}\dfrac{v}{V} \end{cases}}$$

3. $$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 \\ E_c' = \frac{1}{2} (m+M) V'^2 \end{cases}$$

$$\Delta E_c = E_c' - E_c$$

$$= \frac{1}{2}\left[(m+M)V'^2 - m v^2 - M V^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M^2V^2 + m^2v^2}{m+M} - m v^2 - M V^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{M^2}V^2 + \cancel{m^2}v^2 - (\cancel{m}+M)m v^2 - (m+\cancel{M})M V^2}{m+M}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{mM}{m+M}(v^2+V^2)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E_c = -\frac{mM}{2(m+V)}(v^2+V^2)}$$

4- Elastique $\Rightarrow \Delta E_c = 0$.

Or, $\Delta E_c < 0$ (v et V non-nuls!).

Donc il est $\boxed{\text{impossible}}$ de rendre cette collision élastique!

Q5

1. $\vec{F} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{A}$; $\vec{R} = -k\,\overrightarrow{P_0P}$; $\vec{P} = m\vec{g}$; $\vec{A} = -\rho_0 V \vec{g}$

$\overrightarrow{P_0P}$ va vers le haut, donc $\vec{R}$ va vers le bas, et on trouve

$$\vec{F} = \vec{0} \iff ke + mg = \rho_0 g V$$

$$\iff \boxed{e = \frac{g}{k}\left(\rho_0 V - m\right)}$$

2. $e \geq 0$? g, k sont positif, donc il faut $\rho_0 V - m > 0$.

Or ceci est équivalent à

$$\rho_0 > \frac{m}{V},$$

ce qui est supposé dans l'énoncé.

3. $h_i = ?$ On a :

$$\|\overrightarrow{OP}\| + h_i = H.$$

Or $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$, et $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{P_0P}$

sont verticaux, tous deux orientés vers le haut, donc

$$\|\vec{OP}\| = \underbrace{\|\vec{OP_0}\|}_{\ell} + \underbrace{\|\vec{P_0P}\|}_{e}.$$

$$\Rightarrow \boxed{h_i = H - \|\vec{OP}\| = H - \ell - e}.$$

4. Bilan des forces donne cette fois :

$$ke + mg = \rho_0 g V_i$$

où $V_i = \pi r^2 h_i = \pi r^2 (H - \ell - e)$.

Donc on trouve

$$ke + mg = \rho_0 g \pi r^2 (H - \ell - e)$$

$\hookrightarrow$ c'est une équation pour e. On résout :

$$(k + \rho_0 g \pi r^2) e + mg = \rho_0 g \pi r^2 (H - \ell)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e = \frac{\rho_0 g \pi r^2 (H - \ell) - mg}{k + \rho_0 g \pi r^2}}$$

Q6

1. $Q = v S$ appliqué en A donne

$$v_A = \frac{Q}{S_A} \quad \text{avec} \quad S_A = \pi r_A^2 .$$

$$\Rightarrow \boxed{v_A = \frac{Q}{\pi r_A^2}}$$

Avec $Q = 0.6\,L/min$ et $r_A = 1.2\,cm$;

$1L = 10\,cm^3 = 10^{-5}\,m^3$

$$v_A = \left(\frac{0.6 \times 10^{-5}\,m^3}{60\,s}\right) \frac{1}{\pi (1.2 \times 10^{-2}\,m)^2}$$

$$\boxed{v_A = 0.022\,m/s.}$$

En B ? Conservation du débit donne

$$Q = v_B \pi r_B^2 .$$

Or $r_B = r_A$, donc $\boxed{v_B = v_A}$.

2. On applique le thm de Bernoulli

entre les points A et B :

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + p_B$$

$$\Rightarrow \quad p_A = \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right) + \rho g h_B + p_B$$

Or les vitesses étant les mêmes, on trouve $\boxed{p_A = p_B + \rho g h_B}$.

Avec $\rho = 1100\ kg/m^3$, $g = 10\ m/s^2$, $h_B = 2.3\ m$:

$$\rho g h_B = 25\,300\ Pa$$

Donc, avec $p_B = 15\,000\ Pa$:

$$\boxed{p_A = 40300\ Pa}$$

3. Bernoulli entre B et C :

$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + p_B = \frac{1}{2}\rho v_C^2 - \rho g h_C + p_C$$

(car $h_C = 30$ cm <u>en-dessous</u> du point A).

Donc :

$$\frac{1}{2}\rho v_C^2 = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g(h_B + h_C) + p_B - p_C .$$

Or $p_C = p_B$, donc

$$\frac{1}{2}\rho v_C^2 = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g(h_B + h_C)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{v_B^2 + 2g(h_B + h_C)}}$$

Avec $v_B = 0.022\,m/s$ (cf. 1.),

$h_B = 2.3\,m$, $h_C = 30\,cm$ et $g = 10\,m/s^2$:

$$\boxed{v_C = 7.2\,m/s}$$

Rayon ? Conservation du débit donne

$$Q = v_C \pi r_C^2 \Rightarrow \boxed{r_C = \sqrt{\frac{Q}{\pi v_C}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_C = \sqrt{\frac{10^{-5}\,m^3/s}{\pi \times 7.2\,m/s}} = 6.65 \times 10^{-4}\,m}$$

4. p_A diminue ?

$\Rightarrow$ il faut s'assurer que p_A soit suffisament élevé que pour avoir $p_B > 0$.

Or $p_A = p_B + \rho g h_B$

$\Leftrightarrow$ $p_B = p_A - \rho g h_B$

Donc $p_B > 0$ implique

$$p_A > \rho g h_B$$

$\Rightarrow$ la valeur minimale possible est $\rho g h_B = 25300\,\text{Pa}$