v2

BV – Correctif Examen Juin 2023

Q1

1. $\vec{g} = (0, -g) \qquad g = 10\,m/s^2$

2. $\vec{v_1} = v_1 (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$

$\vec{v_2} = v_2 (-\cos\theta_2, \sin\theta_2)$

3. $$\begin{cases} x_1(t) = v_1 \cos\theta_1 \, t \\ z_1(t) = v_1 \sin\theta_1 \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_2(t) = d - v_2 \cos\theta_2 \, t \\ z_2(t) = v_2 \sin\theta_2 \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1(t_*) = v_1 \cos\theta_1 \, t_* = \frac{d}{2} \\ z_1(t_*) = v_1 \sin\theta_1 \, t_* - \frac{1}{2} g t_*^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad t_* = \frac{d}{2} \frac{1}{v_1 \cos\theta_1}$$

et $$v_1 \sin\theta_1 = \frac{1}{2} g t_* = \frac{g d}{4 v_1 \cos\theta_1}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \frac{g d}{4 v_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{g d}{4 \sin\theta_1 \cos\theta_1}}}$$

A.N. : $g = 10\,m/s^2$ $d = 0.4\,m$

$\theta_1 = 0.2\,\frac{\pi}{4}$ rad

$\Rightarrow \sin\theta_1 \cos\theta_1 = 0.1545...$

$\Rightarrow \boxed{v_1 = 2.54\ m/s}$

$$\begin{cases} x_2(t_*) = d - v_2 \cos\theta_2\, t_* = d/2 \\ z_2(t_*) = v_2 \sin\theta_2\, t_* - \frac{1}{2} g t_*^2 = 0 \end{cases}$$

Donc $t_* = \dfrac{d}{2 v_2 \cos\theta_2}$. On doit donc avoir

$$\frac{d}{2 v_1 \cos\theta_1} = \frac{d}{2 v_2 \cos\theta_2} \Leftrightarrow v_1 \cos\theta_1 = v_2 \cos\theta_2 .$$

De plus : $v_2 \sin\theta_2 = \frac{1}{2} g t_* = \frac{1}{2} g \dfrac{d}{2 v_2 \cos\theta_2}$

$$\Rightarrow v_2 \sin\theta_2 = \frac{g d}{2 v_1 \cos\theta_1}$$

Donc $$v_2^2 = (v_1 \cos\theta_1)^2 + \left(\frac{g d}{2 v_1 \cos\theta_1}\right)^2$$

Or $\dfrac{g d}{2 v_1 \cos\theta_1} = v_1 \sin\theta_1$, donc $\boxed{v_2 = v_1}$.

On a alors aussi $v_1 \cos\theta_1 = v_1 \cos\theta_2$, donc

$$\boxed{\theta_1 = \theta_2} : \quad \begin{cases} v_2 = v_1 = 2.54 \text{ m/s} \\ \theta_1 = \theta_2 = 0.2\pi/4 \text{ rad} = 9° . \end{cases}$$

6. On veut que $\dfrac{gd}{v_2^2} < 1$, donc

$$\sqrt{gd} < v_2$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{2,min} = \sqrt{gd} = \sqrt{4} \text{ m/s} = 2 \text{ m/s} .}$$

$$\frac{gd}{2v_1^2} = \sin\theta_1 \cos\theta_1 = \frac{1}{2}\sin(2\theta_1)$$

$$\Rightarrow \frac{gd}{v_1^2} = \sin(2\theta_1) < 1$$

$$\Rightarrow v_1 > \sqrt{gd}$$

$$\Rightarrow v_{1,min} = \sqrt{gd}$$

Q2

1. Notons P la position du corps.

Equilibre des forces $\Rightarrow$ $k_1 \|\overrightarrow{B_1P}\| = k_2 \|\overrightarrow{B_2P}\|$.

On a

$$\overrightarrow{B_1P} = \overrightarrow{B_1O} + \overrightarrow{OP} \quad \text{avec} \begin{cases} \overrightarrow{OB_1} = (-l_1, 0) \\ \overrightarrow{OP} = (x_0, 0) \end{cases}$$

et $\overrightarrow{B_2P} = \overrightarrow{B_2O} + \overrightarrow{OP}$ avec $\overrightarrow{OB_2} = (l_2, 0)$.

Donc $\overrightarrow{B_1P} = (l_1 + x_0, 0)$ et $\overrightarrow{B_2P} = (x_0 - l_2, 0)$,

et on trouve

$$k_1 |l_1 + x_0| = k_2 |x_0 - l_2|.$$

Avec le système d'axe de la figure, on a $x_0 > 0$. De plus, $l_2 > x_0$, donc

$$k_1 (l_1 + x_0) = k_2 (l_2 - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1 l_1 - k_2 l_2 + k_1 x_0 + k_2 x_0 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{x_0 = \frac{k_2 \ell_2 - k_1 \ell_1}{k_1 + k_2}}$$

A.N. : $k_1 = 0.6\ N/cm$ $\qquad \ell_1 = 16\ cm \quad \ell_2 = 14\ cm$

$$k_2 = 140\,000\ g/s^2 = 140\ kg/s^2 = 140\ N/m = 1{,}4\ N/cm$$

$k_2 \ell_2 = 19.6\ N$ $\qquad k_1 \ell_1 = 9.6\ N$

$k_1 + k_2 = 2\ N/cm \Rightarrow \boxed{x_0 = 5\ cm}$

Alternative : 6 cm

2. Force du ressort 1 : vers la gauche, norme $k_1(\ell_1 + x_0)$.

$\ell_1 + x_0 = 21\ cm \Rightarrow \boxed{k_1(\ell_1 + x_0) = 12{,}6\ N}$ Alt. : 13.2 N

Force du ressort 2 : vers la droite, norme $k_2(\ell_2 - x_0)$

$\ell_2 - x_0 = 9\ cm \Rightarrow \boxed{k_2(\ell_2 - x_0) = 12{,}6\ N}$ Alt. 11.2 N

(forcément !).

Poids : vers le bas, norme $\boxed{Mg = 4.56\ N}$

Force normale exercée par la table : vers le haut, norme $\boxed{Mg = 4.56\ N}$ (par équilibre).

3. Force du ressort 1 : toujours vers la gauche, cette fois de norme $k_1 l_1$.

Pour 2 : vers la droite, norme $k_2 l_2$.

$k_1 l_1 = 9.6\,N$ $\qquad$ $k_2 l_2 = 19.6\,N$

Donc la force de frottement doit aller vers la gauche (pour "aider" le ressort 1), et sa norme vaut $\boxed{k_2 l_2 - k_1 l_1 = 10\,N}$

4. On doit avoir $k_2 l_2 - k_1 l_1 \leq \mu_s N$, où $N = Mg$. Donc

$$\boxed{\mu_s \geq \frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{N}}$$

A.N. : $\dfrac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{N} = \boxed{2.19}$.

Q3

1. Equilibre des forces sur le système perche + micro :

$$\vec{f}_A + \vec{f}_B + M\vec{g} + m\vec{g} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f}_A + \vec{f}_B = -(M+m)\vec{g}}$$

Donc en particulier $\vec{f}_A + \vec{f}_B$ est vers le haut : $\vec{f}_A + \vec{f}_B = (0, 0, (M+m)g)$.

Comme $\vec{f}_A$ est vers le bas, on a

$$\vec{f}_A = (0, 0, -f_A) \quad \text{donc}$$

$$\vec{f}_B = (0, 0, f_A + (M+m)g)$$

et donc $\vec{f}_B$ est vers le haut.

2. $\vec{\tau}_{C_G}(\vec{f}_A) = \overrightarrow{C_G A} \times \vec{f}_A$

avec $\|\overrightarrow{C_G A}\| = \frac{L}{2}$

Donc $\boxed{\vec{\tau}_{C_G}(\vec{f}_A) = \left(0, -\frac{L}{2} f_A \cos\theta, 0\right)}$

3. $\vec{\tau}_{C_G}(\vec{f}_B) = \overrightarrow{C_G B} \times \vec{f}_B$ avec $\|\overrightarrow{C_G B}\| = \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{L}{6}$.

Donc $\boxed{\vec{\tau}_{C_G}(\vec{f_B}) = \left(0, \frac{L}{6} f_B \cos\theta, 0\right)}$

4. Equilibre des moments de force !

$$\vec{\tau}_{C_G} = \vec{\tau}_{C_G}(\vec{f_A}) + \vec{\tau}_{C_G}(\vec{f_B}) + \underbrace{\vec{\tau}_{C_G}(M\vec{g})}_{=\vec{0}} + \vec{\tau}_{C_G}(m\vec{g})$$

$$\vec{\tau}_{C_G}(m\vec{g}) = \left(0, \frac{L}{2} mg\cos\theta, 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{L}{2} f_A \cos\theta + \frac{L}{6} f_B \cos\theta + \frac{L}{2} mg\cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} f_A + \frac{1}{6} f_B + \frac{1}{2} mg = 0.$$

D'autre part on sait que

$$\vec{f_A} + \vec{f_B} = \left(0, 0, -f_A + f_B\right) = \left(0, 0, (M+m)g\right),$$

donc on a le système :

$$\begin{cases} -f_A + f_B = (M+m)g \\ -\frac{1}{2} f_A + \frac{1}{6} f_B = -\frac{1}{2} mg \end{cases}$$

On en tire $f_B = (M+m)g + f_A$ et ensuite

$$-\frac{1}{2} f_A + \frac{1}{6}(M+m)g + \frac{1}{6} f_A = -\frac{1}{2} mg$$

$$-\frac{1}{3} f_A = -\frac{1}{6} Mg - \frac{1}{6} mg - \frac{1}{2} mg$$

$$= -\frac{1}{6} Mg - \frac{2}{3} mg$$

$$\Rightarrow \quad f_A = \left(\frac{1}{2} M + 2m\right) g$$

Enfin :

$$f_B = (M+m)g + \left(\frac{1}{2} M + 2m\right) g = \left(\frac{3}{2} M + 3m\right) g$$

Donc :

$$\boxed{\begin{cases} f_A = \left(\frac{1}{2} M + 2m\right) g \\ f_B = 3\left(\frac{1}{2} M + m\right) g \end{cases}}$$

Q4

1. On applique le théorème de Bernoulli pour une ligne de courant allant de A à C :

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A + p_A = \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g z_C + p_C$$

A et C sont à l'air libre, donc

$$p_A = p_C = p_{atm}.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\rho v_C^2 = \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g (z_A - z_C)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{v_A^2 + 2g(z_A - z_C)}}$$

A.N. :

$$g(z_A - z_C) = (10 m/s^2)(0.15 m + 1.2 m) = 13.5 m^2/s^2$$

$$v_A^2 = (0.07 m/s)^2 = 4.9 \times 10^{-3} m^2/s^2$$

(Ceci est négligeable comparé à $13.5 m^2/s^2$)

$$\Rightarrow \boxed{v_c = 5,2 \, m/s}$$

2. Nous avons besoin de connaitre le débit en A :

$$Q_c = v_c \, \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 .$$

Pour un volume écoulé égal à V, il faut attendre un temps

$$\Delta t = \frac{V}{Q_c} .$$

Donc, pour $V = 1 \ell = 10^{-3} m^3$ et $d = 2 \, cm$,

$$Q_c = 1.6 \times 10^{-3} \, m^3/s$$ Alternative : $1.26 \times 10^{-3} \, m^3/s$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{10^{-3} m^3}{1.6 \times 10^{-3} m^3/s} = 0.63 \, s} .$$

Alt. : $0.79 \, s$

3. Conservation du débit : $Q_B = Q_C$. Or le diamètre est constant, donc ceci implique

$$\boxed{v_B = v_C = 5,2 \, m/s}$$ Alt. : $4 \, m/s$

Pression ? Appliquons Bernoulli, par exemple entre B et C. On trouve :

$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B + p_B = \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g z_C + p_C$$

Avec $v_C = v_B$ et $p_C = p_{atm}$, on a donc :

$$p_B = p_{atm} + \rho g (z_C - z_B)$$

A.N. : $z_C - z_B = -1.2\,m - 0.45\,m = -1.65\,m$

$$\Rightarrow \rho g (z_C - z_B) = -1.65 \times 10^4\ Pa$$

$$\Rightarrow p_B = 101325\ Pa - 16500\ Pa$$

$$\boxed{p_B = 84825\ Pa}$$

4. $p_* = 57000\ Pa$.

On veut $p_B > 0$, sinon ça n'a pas de sens !

Donc $p_* + \rho g_* (z_C - z_B) > 0$

$z_C - z_B$ est négatif, donc on trouve

$$g_* < \frac{p_*}{\rho (z_B - z_C)}$$

A.N. : $\dfrac{p_*}{\rho (z_B - z_C)} = \dfrac{57000 Pa}{(1000 kg/m^3)(1.65 m)} = 34.5 \ m/s^2$

$$\Rightarrow \boxed{g_{*,max} = 34.5 \ m/s^2}$$