Université Libre de Bruxelles

Année Académique 2023-2024 *PHYS-G1102*

Physique appliquée aux sciences de la Vie *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Médecine et en Sciences Dentaires

Série d'exercice n°1

Analyse dimensionnelle, unités et cinématique en une dimension

1 Rappels

Analyse dimensionnelle et unités

- A toute grandeur physique, c'est-à-dire mesurable, est associé sa *dimension* qui en est une caractéristique unique et faisant partie de sa définition.
- Dans le cours, nous utilisons la *longueur* (L), le *temps* (T) et la *masse* (M) pour exprimer les dimensions d'autres grandeurs.
- Pour les valeurs numériques d'une grandeur physique nous utilisons des *unités*, qui font référence à des étalons de mesure. Dans les conventions du *Système International d'Unités*, les grandeurs de base pour notre cours ont les unités suivantes:
  1. le *mètre* pour la longueur,
  2. la *seconde* pour le temps,
  3. le *kilogramme* pour la masse.
- D'autres choix d'unités sont possibles, et il est parfois nécessaire de *convertir* d'une unité à l'autre. L'outil mathématique pertinent pour la conversion d'unité, dans la majorité des cas, est la *règle des proportions* (mais pas toujours, cf. ex. 9).
- Les *grandeurs dérivées* sont construites en combinant les grandeurs de base L, T et M.
- La valeur numérique d'une grandeur physique doit ***toujours*** s'accompagner de ses unités. Autrement, le résultat n'a ***aucun sens***. De même, il est impossible d'additionner ou de comparer des grandeurs ayant des dimensions différentes.
- Pour les valeurs numériques, on peut utiliser la *notation scientifique*: par exemple, une valeur comme $0.0034m$ s'écrit $3.4 \times 10^{-3}m$.
- **Notation:** on utilise les crochets $[X]$ pour les dimensions d'une grandeur X. Par exemple:

$$[\text{surface}] = L^2 \tag{1}$$

- **Remarque:** certaines grandeurs n'ont pas de dimension mais peuvent néanmoins être exprimées en utilisant des unités sans dimensions (cf. ex. 6 et ex. 10).

Cinématique en une dimension

- Nous nous intéressons à un point P pouvant se déplacer sur une droite ("monde à une dimension").
- Nous avons introduit la notion de *point de référence*, que nous notons O, et d'un axe des x sur lequel nous repérons le point P par une *coordonnée.* La coordonnée x du point P par rapport à O permet de localiser univoquement la position de P. La coordonnée x peut être positive, négative, ou nulle.
- Les dimensions de x sont celles de *longueur* L.
- Lorsque le point P est en mouvement par rapport à O, la coordonnée x devient une *fonction du temps* t: on note alors $x(t)$.
- **Définition**: la *vitesse moyenne* $v(t_1, t_2)$ pour l'intervalle de temps compris entre t_1 et t_2 est définie par
$$v(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \,.$$
- Durant le cours, nous avons introduit la notion de *vitesse instantannée v(t)*, et nous avons discuté de la propriété suivante:
- **Propriété**: la vitesse instantannée $v(t)$ est donnée par la *dérivée* de $x(t)$:
$$v(t) = x'(t) \,.$$
- Les dimensions de v sont *longueur par unité de temps*, L/T.
- De façon analogue nous avons introduit l'*accélération instantanée*, notée $a(t)$, qui est telle que
$$a(t) = v'(t) = x''(t) \,.$$
- Les dimensions de a sont *longueur par unité de temps au carré*, L/T^2.
- Les équations pour les *mouvements élémentaires* décrits au cours sont les suivantes:
  1. Le Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU): $x(t) = x_0 + v_0 t$,
  2. Le Mouvement Rectiligne Uniformément Accéléré (MRUA): $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$,
  3. Le Mouvement Harmonique (MH): $x(t) = A \sin(\omega t)$.

  Dans ces exemples, les quantités x_0, v_0, a, A et ω sont des *paramètres constants.*
- La constante d'accélération gravitationnelle sur Terre, g, peut être prise égale à $10m/s^2$.
- **Formules utiles:**
  1. On considère l'équation suivante pour l'inconnue x:
  $$ax^2 + bx + c = 0 \,, \tag{2}$$
  où a, b et c sont des constantes. Alors on définit le *discriminant* Δ, par la formule
  $$\Delta = b^2 - 4ac \,. \tag{3}$$
  Si $\Delta > 0$, alors l'équation (2) possède *deux* solutions que l'on note x_+ et x_- et qui sont données part
  $$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \,. \tag{4}$$
  Si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une solution, à savoir $-b/2a$.
  Si $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de solution réelle à l'équation (2).

2. Les dérivées du cosinus et du sinus sont:

$$\text{Si } f(x) = \sin(ax), \text{ alors } f'(x) = a\cos(ax)\,, \tag{5}$$
$$\text{Si } f(x) = \cos(ax), \text{ alors } f'(x) = -a\sin(ax)\,. \tag{6}$$

3. Pour un mouvement périodique de période T, nous pouvons trouver la fréquence ν par la formule

$$\nu = \frac{1}{T} \cdot \tag{7}$$

2 Exercices à préparer

Attention! Ces exercices **ne** seront **pas** corrigés durant la séance, mais les solutions seront disponibles sur l'UV.

Analyse dimensionnelle et unités

1. Combien il y a-t-il de centimètres (cm) dans $1.84m$?

2. Quelles sont les *dimensions* d'une vitesse?

3. Simplifier au maximum $1000 \times 10 \times (10^{-2})^3$.

Cinématique en une dimension

1. On s'intéresse au mouvement du piston d'une seringue, repéré par le point P. On prend pour point de référence, O, le point occupé par le piston lorsque la seringue est vidée. De plus, nous prenons l'axe des x tel qu'indiqué sur la figure 1. Que vaut le signe (positif ou négatif) de x lorsque la seringue est remplie?

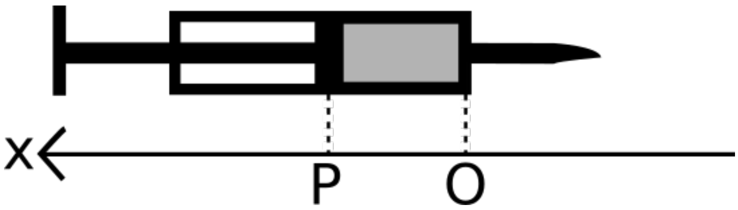

Figure 1: Le point P correspond à la position du piston de la seringue.

2. Même question que ci-dessus, excepté que cette fois nous prenons l'axe des x tel que sur la figure 2.

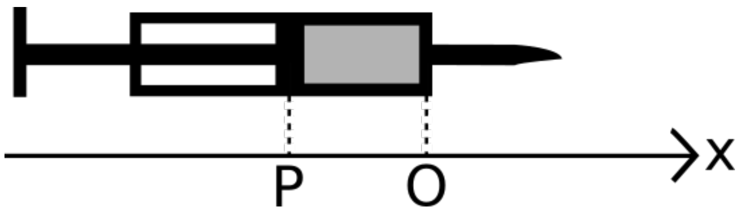

Figure 2: L'axe des x a changé de sens par rapport à la figure 1.

3. Sur une promenade en vélo d'une durée de $5h$, ma vitesse moyenne est de $18km/h$. Combien ai-je parcouru de km? Que vaut ma vitesse moyenne en m/s?

3 Exercices

Les exercices marqués d'une étoile sont à résoudre en priorité.

3.1 Analyse dimensionnelle et unités

Analyse Dimensionnelle

Dans ces questions, on demande d'exprimer les dimensions en fonction de nos grandeurs de bases L, T et M.

1. Quelles sont les dimensions de l'accélération?

2. Quelles sont les dimensions d'un volume?

3. On définit la constante de gravitation universelle G par

$$G = 6.67430 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}\,, \tag{8}$$

où le symbole N est défini par $1N = 1kg.m.s^{-2}$.

   (a) Quelles sont les dimensions de G?

   (b) Quelles sont les dimensions de la combinaison

$$\frac{Gm_1m_2}{R^2}\,, \tag{9}$$

   où m_1, m_2 sont des masses et R est une distance?

4. On définit le *débit* d'un tuyau d'arrosage comme le volume d'eau sortant par unité de temps. Quelles sont les dimensions du débit?

Manipulations sur les unités

5. Le joueur de football américain Tom Brady mesure 6 pieds et 4 pouces ("6 feet and 4 inches"). En sachant que 1 foot (symbole: ft) = 30.48 cm et 1 inch (symbole: in) = 2.4 cm, exprimer sa taille en centimètres (cm). Que vaut sa taille en utilisant uniquement des pouces ($inches$) ou uniquement des pieds ($feet$)?

6. Une mole (symbole: mol) est une unité sans dimension permettant de manipuler de façon pratique des grands nombres. Par définition, une mole vaut $6.02214076 \times 10^{23}$. Sachant que nous sommes 7.942 milliards d'êtres humains sur Terre, et en supposant que chaque humain contient 10^{14} cellules, combien de moles de cellule d'être humain y a-t-il sur Terre?

7. Pour un bloc de volume V et de masse M, on définit sa *densité de masse* par $\rho = M/V$. En supposant que $\rho = 750kg/m^3$ et $V = 245cm^3$, que vaut la masse M du bloc?

8. La vitesse moyenne de la dérive des continents de $25mm$ par année. Que vaut cette vitesse dans les unités du Système International?

⋆ 9. Le Kelvin (symbole K) est l'unité pour la température dans le Système International. On utilise aussi parfois le degré Celsius (symbole $°C$) ou le degré Fahrenheit (symbole $°F$). Par définition, on peut convertir les degrés Celsius en degrés Fahrenheit ou en Kelvin par les formules:

$$T(°F) = \frac{9}{5}T(°C) + 32\,, \tag{10}$$

$$T(K) = T(°C) + 273,15\,. \tag{11}$$

(a) Que vaut $37°C$ en degré Fahrenheit?

(b) Que vaut $37°C$ en Kelvin?

(c) Inverser la loi de conversion (10) afin d'obtenir la relation permettant de convertir directement des degrés Fahrenheit en degré Celsius.

(d) En combinant (10) et (11), déterminer la relation permettant de convertir directement des degrés Fahrenheit en Kelvin.

(e) La loi de conversion entre Kelvin et degré Celsius respecte-t-elle la règle des proportions?

10. Afin de mesurer des angles, on utilise le degré (symbole: °) (Attention à ne pas confondre avec les unités pour la température!). Par définition, 360° correspond à un tour complet du cercle (c'est donc un exemple de grandeur sans dimension). On utilise également le *radian* (symbole: rad), et par définition:

$$1\,rad = \frac{360°}{2\pi} \cdot \tag{12}$$

On définit également les unités suivantes: 1 tour (symbole: tr) vaut 360° et un grade (symbole: gon) vaut 0.9°.

(a) Que valent les angles 45°, 90°, 180°, 270° en radians? Vous pouvez garder le symbole π dans vos réponses.

(b) Que vaut $\pi/3\,rad$ en tours? En degrés? En grades?

3.2 Cinématique en une dimension

⋆ 1. Un pousse-seringue est un appareil permettant de déplacer automatiquement le piston d'une seringue. Un tel appareil peut être programmé pour effectuer la séquence suivante:

i. Phase de bolus: vitesse de 0.3 cm/s, durant 10 secondes;

ii. Phase d'infusion: vitesse de 0.01 cm/s, durant 100 secondes;

La seringue effectue la phase de bolus puis enchaîne directement avec la phase d'infusion. Nous utilisons l'origine O et le point P comme sur la figure 3, et l'axe des x est orienté vers la droite sur le schéma. A l'instant $t = 0s$, le point P se trouve au point O.

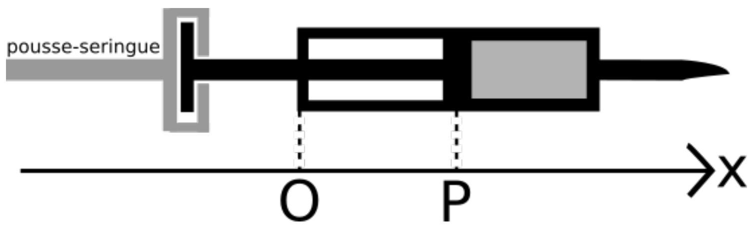

Figure 3: Le point O est pris pour origine, l'axe des x est vers la droite, et le point P représente le bout du piston.

(a) Sur un graphique avec x en ordonnée et le temps t en abscisse, représenter la trajectoire du point P.

(b) Quelle est la distance totale parcourue à la fin du bolus?

(c) Quelle est la distance totale parcourue à la fin de l'infusion?

(d) Quelle est la vitesse moyenne sur toute la trajectoire?

(e) Ecrire l'équation de droite décrivant le mouvement du point P dans la seconde phase d'injection.

Suivant un autre protocole d'injection, on injecte un patient avec le même pousse-seringue mais avec une seule phase d'infusion (pas de bolus), avec une vitesse de $0.06 cm/s$, et ce durant 5 minutes.

(f) Représenter le mouvement du point P dans chacun des protocoles sur le même graphique.

(g) A quel instant la même quantité de produit est injectée suivant les deux protocoles? Résoudre graphiquement et algébriquement cette question.

2. Une fusée d'essai est lancée à la verticale, à partir du sol, avec une accélération constante de $50\ m/s^2$. Elle épuise son carburant après $4\ s$. En négligeant la résistance de l'air, on demande de calculer:

   (a) la hauteur de la fusée lorsque le moteur s'arrête,

   (b) la hauteur maximale atteinte,

   (c) la durée totale du vol.

⋆ 3. Une pierre est lâchée sans vitesse initiale du sommet d'un immeuble de $30\ m$ de hauteur. Une demi-seconde plus tard, une seconde pierre est jetée verticalement vers le bas avec une vitesse de $20\ m/s$. A quelle hauteur, par rapport à la base de l'immeuble, la seconde pierre rattrape-t-elle la première ?

⋆ 4. Le diaphragme est un muscle jouant un rôle fondamental dans la respiration des mammifères. De façon très approximative, la position du diaphragme au cours de la respiration peut être représenté par une sinusoïde.

   On dénote par P la position du diaphragme. On choisit de décrire son mouvement par rapport à sa position moyenne. Durant une respiration, le point P est donc tantôt en dessous de O, tantôt au dessus. On modélise alors la coordonnée $x(t)$ par la formule:

$$x(t) = A\sin(2\pi\nu t)\,,$$

   où A et ν sont des nombres positifs.

   (a) Quelles sont les dimensions de A?

   (b) Quelles sont les dimensions de ν?

   (c) Quelles sont les interprétations physiques de ces deux paramètres? Donner des valeurs numériques qui vous semblent réalistes.

   (d) Représenter sur un graphe la trajectoire $x(t)$.

   (e) Quelle est la vitesse instantanée $v(t)$ au cours du temps?

   (f) Quelle est l'accélération instantanée $a(t)$ au cours du temps?

   (g) Représenter la vitesse et l'accélération sur le graphe de la position au cours du temps.

   (h) A quels instants la vitesse est-elle nulle? Quelles sont les positions du diaphragme à ces instants?

   (i) Même question pour la vitesse maximale.

   (j) A quels instants l'accélération est-elle nulle? Quelle est la position du diaphragme à ces instants?