

BA1 en Médecine et en Sciences Dentaires

Série d'exercice n° 2

COORDONNÉES, VECTEURS ET CINÉMATIQUE EN 2 ET 3
DIMENSIONS

1 Rappels

Coordonnées et vecteurs

- Nous nous intéressons à un point P pouvant se déplacer sur un *plan* (“monde à deux dimensions”).
- On utilise alors un point de référence O et un *système d'axes* pour repérer P grâce à ses coordonnées.
- **Notation:** pour un point de référence O et deux axes x et y , on note Oxy le système d'axe correspondant.
- Les axes sont *perpendiculaires* l'un par rapport à l'autre, et les coordonnées du point P sont définies par *projection orthogonale* (voir figure 1).

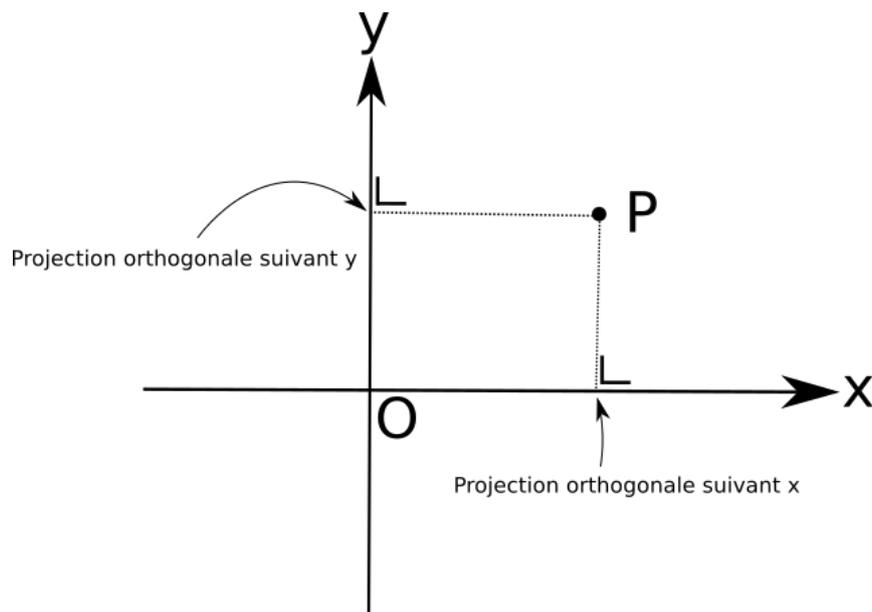


Figure 1: Les coordonnées sont définies par projection orthogonale selon les axes.

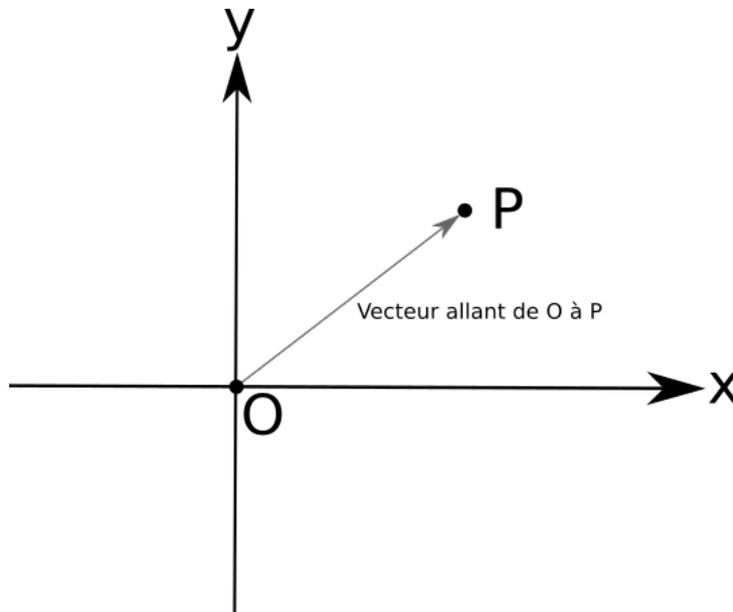


Figure 2: Le vecteur position est la flèche partant du point O et se terminant sur le point P .

- **Définition:** le *vecteur position* est noté \overrightarrow{OP} et correspond à la *flèche partant du point O et se terminant au point P* . Voir figure 2.
- **Définition:** De manière générale, un *vecteur* est un concept mathématique correspondant à une *direction* et une *intensité*. Il peut être caractérisé par ses *composantes* suivant un système d'axes donné. On le note **toujours** avec une petite flèche par dessus, comme par exemple pour \overrightarrow{OP} ou \vec{F} .
- Le calcul des composantes d'un vecteur est appelé la *décomposition* d'un vecteur. Elle se fait toujours *par rapport à un système d'axes*.
- **Notation:** si un vecteur \vec{A} a des composantes A_x et A_y dans le système d'axe Oxy , alors on écrit

$$\vec{A} = (A_x, A_y). \quad (1)$$

D'autres notations existent (en colonnes par exemple) et sont également acceptées (nous ne faisons pas de différence dans ce cours entre ces notations).

- Nous avons également défini géométriquement les opérations de somme et de multiplication par un nombre quelconque. Ces opérations sont résumées ici en supposant que les vecteurs aient été décomposés:
 1. **Somme:** si \vec{A} et \vec{B} sont deux vecteurs, alors le vecteur $\vec{A} + \vec{B}$ a les composantes $(A_x + B_x, A_y + B_y)$.
 2. **Multiplication par un nombre:** si \vec{A} est un vecteur et a est un nombre réel quelconque, alors le vecteur $a\vec{A}$ a les composantes (aA_x, aA_y) .
 3. **Norme:** si \vec{A} est un vecteur de composantes A_x, A_y , alors on définit la *norme* de \vec{A} par le nombre suivant:

$$\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

On note souvent $\|\vec{A}\|$ ou même parfois simplement juste A pour la norme de \vec{A} .

- **Attention:** un vecteur ne peut *jamais* être "égal" à un nombre réel. On ne peut donc *jamais* écrire quelque chose comme " $\vec{A} = 5$ ". *Cela n'a aucun sens car un vecteur contient plus d'information qu'un nombre réel.*

- Si le point P se déplace au cours du temps, le vecteur \overrightarrow{OP} dépend du temps. Les composantes sont donc des fonctions du temps: $x(t)$ et $y(t)$.
- **Rappel de trigonométrie:** Pour un triangle rectangle comme sur la figure 3, on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 + b^2 & a &= h \cos \alpha \\ \tan \alpha &= b/a & b &= h \sin \alpha \end{aligned}$$

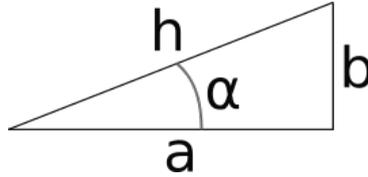


Figure 3: Les relations entre les paramètres a , b , h et α dans un triangle rectangle seront utiles pour décomposer des vecteurs.

Cinématique

- On s'intéresse à un point $P(t)$ se mouvant dans un espace à deux ou trois dimensions. Dans le cas le plus général à trois dimensions, on utilise un point de référence O un système d'axes $Oxyz$.
- **Notation:** Le vecteur position est noté $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t)$ et ses coordonnées sont $(x(t), y(t), z(t))$.
- **Définition:** Le vecteur vitesse est $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.
- **Définition:** Le vecteur accélération est $\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$.
- Ces définitions s'adaptent trivialement si le point se meut dans un espace deux dimensions.
- Nous avons discuté des mouvements suivant au cours:

1. Le **Mouvement Circulaire** (MC): le point P est contraint à se déplacer sur un cercle de rayon R , où R est un nombre positif. Si le mouvement a lieu dans le plan xy , alors on peut toujours écrire

$$x(t) = R \cos \theta(t) \quad y(t) = R \sin \theta(t), \quad (2)$$

où $\theta(t)$ est une certaine fonction du temps.

Cas particulier: le **Mouvement Circulaire Uniforme** (MCU) est par définition un mouvement circulaire avec la contrainte supplémentaire suivante sur $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t, \quad (3)$$

où θ_0 et ω sont des constantes. On appelle θ_0 la *phase* et ω la *vitesse angulaire*. Si $\omega > 0$ (resp. $\omega < 0$), le point tourne dans le sens *anti-horlogique* (resp. *horlogique*). La *période* T est donnée par

$$T = \frac{2\pi \text{ rad}}{|\omega|}. \quad (4)$$

2. Le **Mouvement Parabolique** (aussi appelé le **Mouvement Balistique**): il correspond aux trajectoires telles que l'accélération est constante, verticale et vers le bas; traditionnellement nous mettons l'axe des z à la verticale et vers le haut, et le mouvement est alors:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t, \quad z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (5)$$

où x_0, z_0, v_{0x}, v_{0z} et g sont des constantes. La valeur de g est positive et sur Terre elle vaut approximativement

$$g = 10m/s^2. \quad (6)$$

Les autres constantes sont fixées par les conditions initiales du problème.

• **Formules utiles:**

1. On considère l'équation suivante pour l'inconnue x :

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (7)$$

où a, b et c sont des constantes. Alors on définit le *discriminant* Δ , par la formule

$$\Delta = b^2 - 4ac. \quad (8)$$

Si $\Delta > 0$, alors l'équation (7) possède *deux* solutions que l'on note x_+ et x_- et qui sont données par

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \quad (9)$$

Si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une solution, à savoir $-b/2a$. Si $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de solution réelle à l'équation (7).

2. Les fonctions sinus et cosinus sont telles que

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (10)$$

et ce pour n'importe quelle valeur de l'angle α .

2 Exercices à préparer

Attention! Ces exercices **ne** seront **pas** corrigés durant la séance, mais les solutions seront disponibles sur l'UV.

1. Que valent les coordonnées x et y du point P de la figure 4?

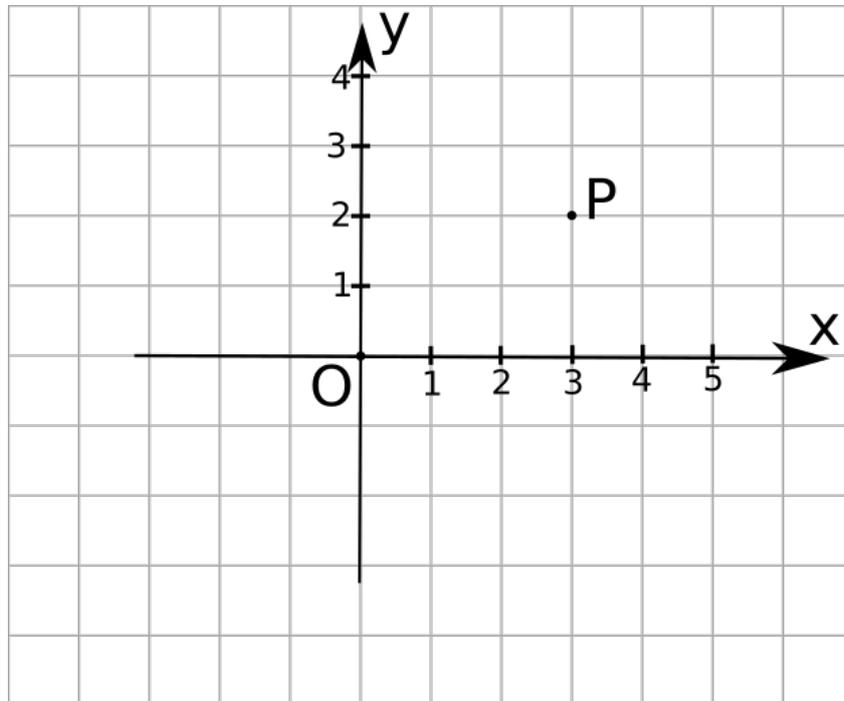


Figure 4: On demande les coordonnées x et y du point P .

2. Que vaut la somme des vecteurs $(1, 0)$ et $(-1, -1)$?
3. Que vaut la norme du vecteur position dans le cas du Mouvement Circulaire défini en (2)?
4. Si le vecteur position vaut $r(t) = (vt, 0, 0)$ où v est une constante, que valent les vecteurs vitesse et accélération?

3 Exercices

Les exercices marqués d'une étoile sont à résoudre en priorité.

★ 1. On considère le système d'axes Oxy et les 4 points P_1, P_2, P_3 et P_4 sur la figure 5.

- Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ et $\overrightarrow{OP_4}$.
- Que vaut le vecteur $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O .
- Que vaut le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_2}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O .

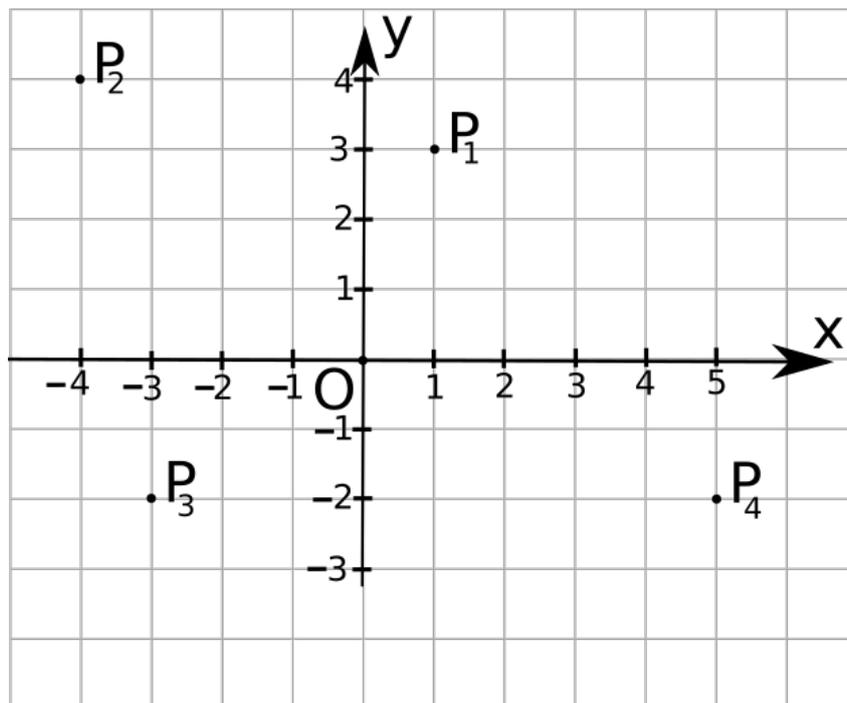


Figure 5: On utilise les coordonnées par rapport au système d'axes Oxy .

2. Soient \vec{A} et \vec{B} deux vecteurs comme sur la figure 6.

- Que valent les composantes de ces vecteurs?
- Que valent les normes A, B et C ?
- Que vaut la somme $\vec{A} + \vec{B}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O .
- Que vaut la différence $\vec{A} - \vec{B}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O .
- Calculer la norme des vecteurs $\vec{A} + \vec{B}$ et $\vec{A} - \vec{B}$.
- Que vaut l'angle que fait \vec{C} avec l'horizontale et avec la verticale? On rapporte ici les angles à leurs valeurs dans le premier quadrant, c'est-à-dire compris entre 0 et $\pi/2rad$.

★ 3. On considère un point dont le vecteur de vitesse \vec{V} est représenté sur la figure 7. On note α l'angle qu'il fait avec l'horizontale et V sa norme. Que valent les composantes V_x et V_y en fonction de α et V ?

4. Même question que ci-dessus, mais cette fois le vecteur est donné sur la figure 8 et α est l'angle pris par rapport à la verticale.

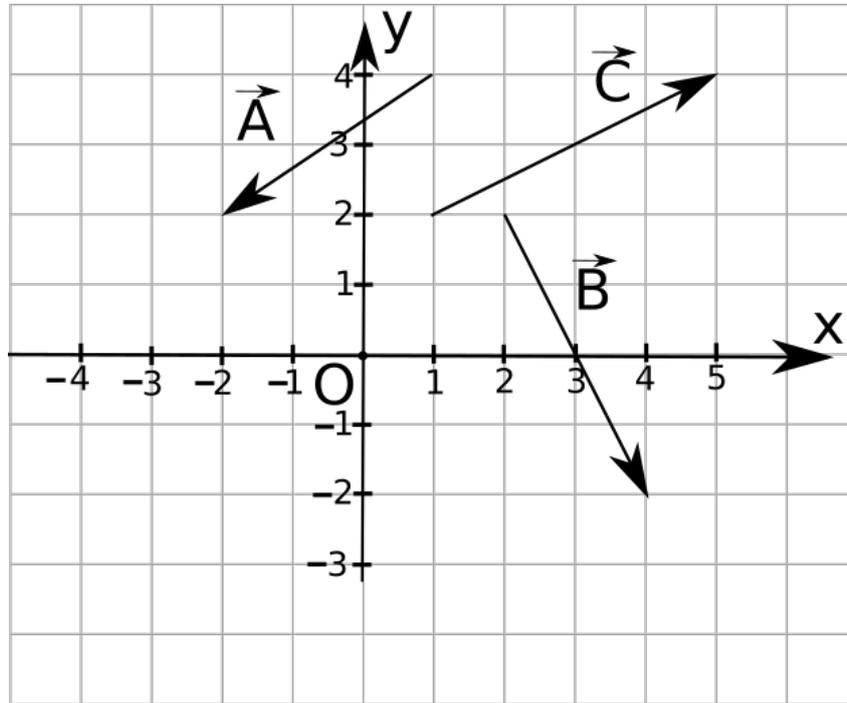


Figure 6: Trois vecteurs à différences angles et différents points de localisation.

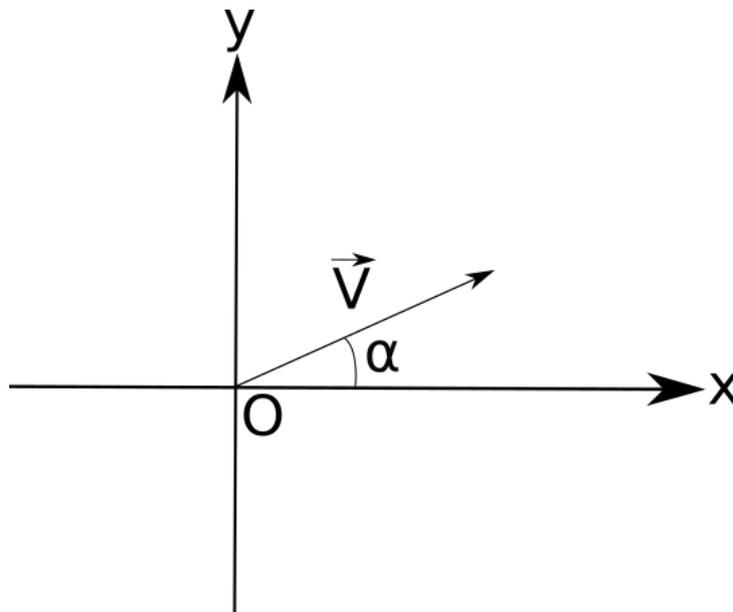


Figure 7: Le vecteur \vec{V} fait un angle α avec l'horizontale.

- ★ 5. (**Mouvement Circulaire Uniforme**) On considère un point P décrivant un mouvement circulaire uniforme dans le plan Oxy et centré en O . Le mouvement est tel qu'en $t = 0s$, le point se trouve en P_0 qui est de coordonnées $(5m, 0)$. Le sens de rotation est anti-horlogique, et il faut $10s$ pour faire exactement un tour complet.
- Que vaut le rayon R de ce mouvement circulaire?
 - Représenter sur la figure 9 le point P_0 .
 - Que vaut la phase θ_0 ? (On suppose qu'elle est comprise entre 0 et 2π .)
 - Que vaut la vitesse angulaire ω ?
 - Quelles sont les coordonnées du point P lorsque $t = 4s$? Représenter approximativement ce point sur la figure 9.

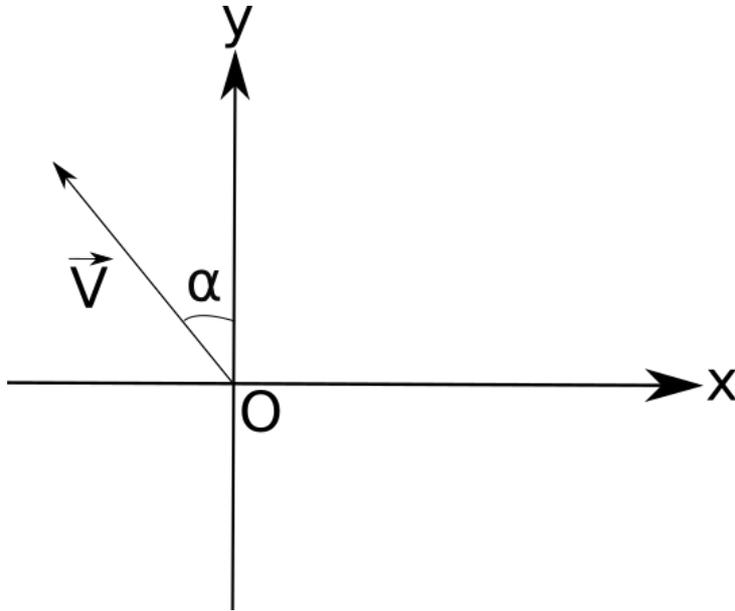


Figure 8: Le vecteur \vec{V} fait un angle α avec la verticale.

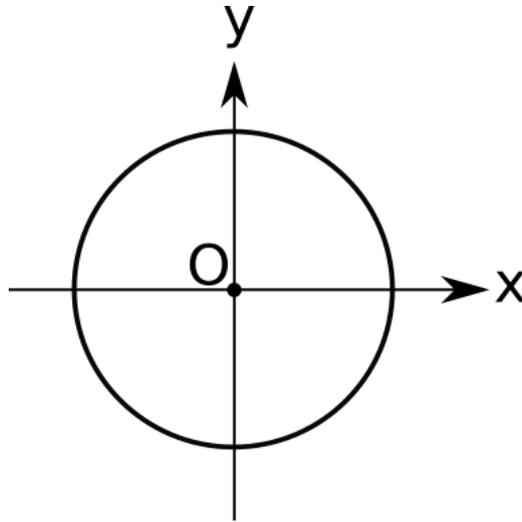


Figure 9: Un cercle dans le système d'axes Oxy .

- f. A quel instant t_1 le point P croise l'axe des y pour la première fois?
 - g. A quel instant t_2 le point P croise l'axe des y pour la deuxième fois?
 - h. Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ pour n'importe quelle valeur de t .
 - i. Représenter sur la figure 9 le vecteur vitesse au temps $t = 0s, t_1$ et t_2 .
 - j. Calculer le vecteur accélération $\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t))$ pour n'importe quelle valeur de t .
 - k. Représenter sur la figure 9 le vecteur accélération au temps $t = 0s, t_1$ et t_2 .
- ★ 6. (**Mouvement Parabolique**) On considère un point P se mouvant dans le plan Oxz et suivant un mouvement parabolique. Au temps $t = 0s$, le point se trouve sur le point de référence O (placé au niveau du sol), sa vitesse fait un angle $\alpha = 13^\circ$ avec l'horizontale et la norme de sa vitesse vaut $v_0 = 5m/s$. Voir figure 10 pour un récapitulatif.
- a. Que valent les composantes v_{0x} et v_{0z} de la vitesse initiale?
 - b. On note t_* l'instant où le point P retombe par terre. Que vaut ce temps?
 - c. Calculer la coordonnée x du point d'impact (on la note x_*).
 - d. Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_z(t))$ pour n'importe quelle valeur de t .

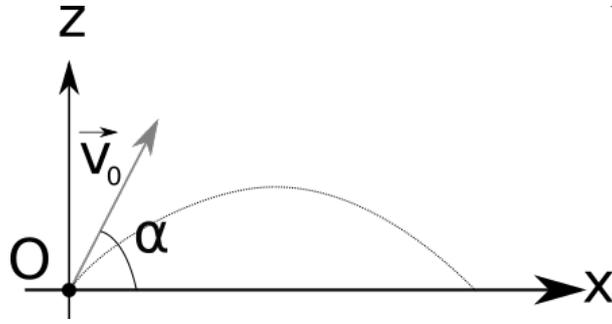


Figure 10: Une trajectoire parabolique dans le plan Oxz .

- e. Que vaut $\vec{v}(t_*)$? Représenter ce vecteur sur la figure 10.
 - f. Quel angle fait $\vec{v}(t_*)$ avec l'axe des x ?
 - g. A quel instant t_{\max} le point P atteint-il sa hauteur maximale? (Rappel: il suffit de résoudre $z'(t) = 0$, voyez-vous pourquoi?)
 - h. Que vaut la vitesse en t_{\max} ? Représenter ce vecteur sur la figure 10.
 - i. Calculer le vecteur accélération $\vec{a}(t) = (a_x(t), a_z(t))$ pour n'importe quelle valeur de t .
 - j. Que vaut $\vec{a}(t)$ pour $t = 0s$, $t = t_*$ et $t = t_{\max}$? Représenter ces vecteurs sur la figure 10.
7. (**Mouvement Parabolique**) On reprend la configuration de la figure 10, mais cette fois les paramètres v_0 et α ne sont pas connus. On impose cependant que la hauteur maximale de la trajectoire soit $h = 15m$ et que l'impact avec le sol ait lieu en $x_* = 9m$. Que doivent valoir les paramètres v_0 et α pour que cela soit possible? (Aide: inspirez-vous des étapes de la question précédente.)
8. (**Mouvement Circulaire Uniforme et Mouvement Parabolique**) On considère le problème à trois dimensions suivant. Un point P se déplace dans le plan xy et effectue un MCU centré sur O . Nous pouvons donc prendre, pour ses coordonnées (x_P, y_P, z_P) , les formules suivantes:

$$x_P(t) = R \cos(\omega t + \theta_0), \quad y_P(t) = R \sin(\omega t + \theta_0), \quad z_P(t) = 0, \quad (11)$$

où R et ω sont des nombres positifs et θ_0 est compris entre 0 et $2\pi rad$. Au temps $t = 0s$, le point P se trouve en $(0, -9m, 0)$. Un autre point, Q , suit un mouvement parabolique dans le plan yz , et nous pouvons donc supposer que ses coordonnées (x_Q, y_Q, z_Q) prennent la forme

$$x_Q(t) = 0, \quad y_Q(t) = y_0 + v_{0y}t, \quad z_Q(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (12)$$

où y_0, v_{0y}, z_0 et v_{0z} sont des nombres réels. Au temps $t = 0s$, le point Q est en O et a une vitesse \vec{v}_0 de norme $v_0 = 15m/s$. Voir figure 11 pour un récapitulatif.

- a. Déterminer les valeurs de R, θ_0, y_0, z_0 .
- b. Déterminer l'angle α que doit faire la vitesse initiale de Q avec l'axe des y afin que Q atteigne $(0, 9m, 0)$.
- c. Que doit valoir ω pour que le point P et Q s'intersectent lors du premier tour de P ?
- d. Que doit valoir ω pour que le point P et Q s'intersectent après que le point P ait complété 5 tours?

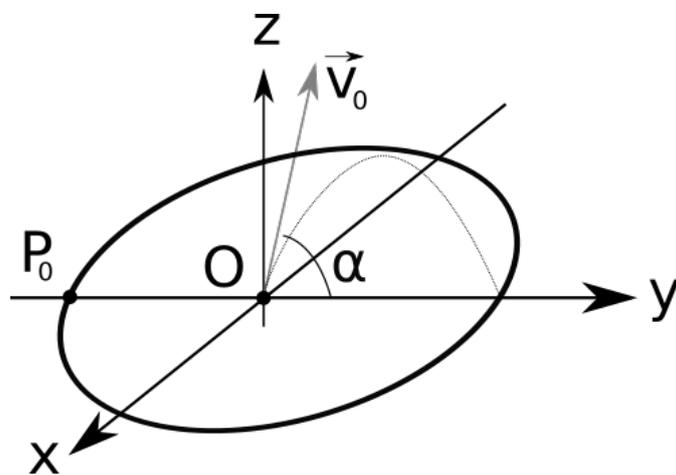


Figure 11: La trajectoire circulaire a lieu dans le plan Oxy et le mouvement parabolique dans le plan Oyz .