Université Libre de Bruxelles

Année Académique 2023-2024 — *PHYS-G1102*

Physique appliquée aux sciences de la Vie — *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Médecine et en Sciences Dentaires

Série d'exercice n° 2

Coordonnées, Vecteurs et Cinématique en 2 et 3 dimensions

Solutions finales des exercices à préparer et des exercices non-étoilés

1 Rappels

Coordonnées et vecteurs

- Nous nous intéressons à un point P pouvant se déplacer sur un *plan* ("monde à deux dimensions").
- On utilise alors un point de référence O et un *système d'axes* pour repérer P grâce à ses coordonnées.
- **Notation:** pour un point de référence O et deux axes x et y, on note Oxy le système d'axe correspondant.
- Les axes sont *perpendiculaires* l'un par rapport à l'autre, et les coordonnées du point P sont définies par *projection orthogonale* (voir figure 1).

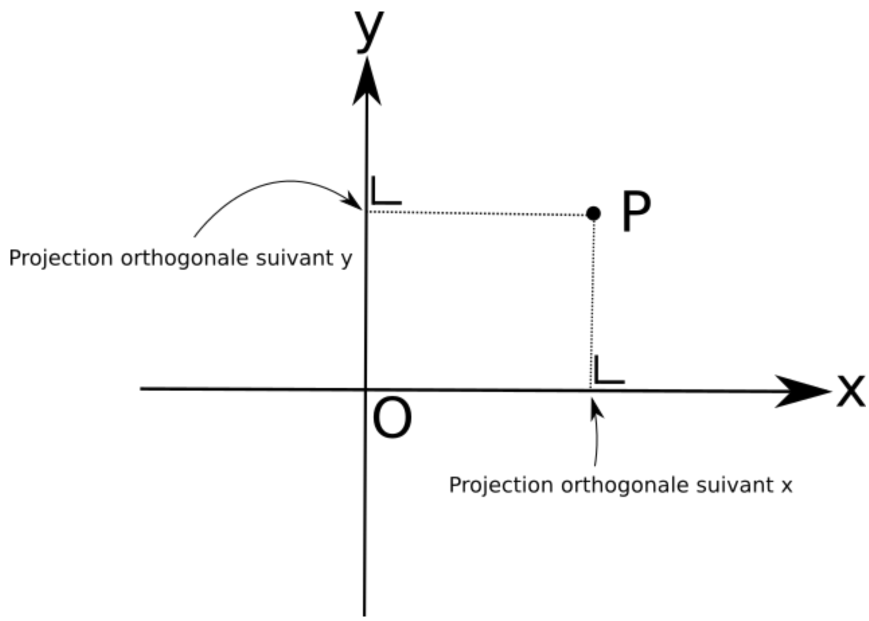

Figure 1: Les coordonnées sont définies par projection orthogonale selon les axes.

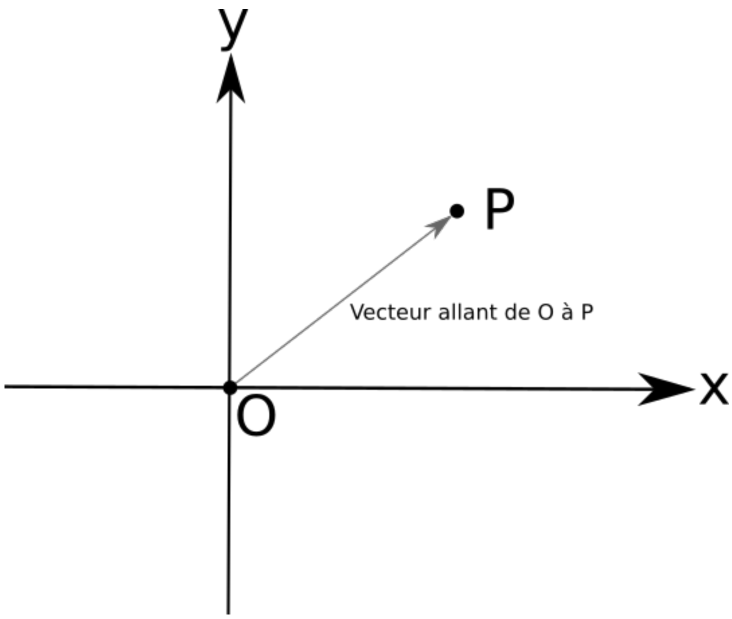

Figure 2: Le vecteur position est la flèche partant du point O et se terminant sur le point P.

- **Définition**: le *vecteur position* est noté $\overrightarrow{OP}$ et correspond à la *flèche partant du point O et se terminant au point P*. Voir figure 2.

- **Définition**: De manière générale, un *vecteur* est un concept mathématique correspondant à une *direction* et une *intensité.* Il peut être caractérisé par ses *composantes* suivant un système d'axes donné. On le note **toujours** avec une petite flèche par dessus, comme par exemple pour $\overrightarrow{OP}$ ou $\vec{F}$.

- Le calcul des composantes d'un vecteur est appelé la *décomposition* d'un vecteur. Elle se fait toujours *par rapport à un système d'axes.*

- **Notation:** si un vecteur $\vec{A}$ a des composantes A_x et A_y dans le système d'axe Oxy, alors on écrit
$$\vec{A} = (A_x, A_y)\,. \tag{1}$$
D'autres notations existent (en colonnes par exemple) et sont également acceptées (nous ne faisons pas de différence dans ce cours entre ces notations).

- Nous avons également défini géométriquement les opérations de somme et de multiplication par un nombre quelconque. Ces opérations sont résumées ici en supposant que les vecteurs aient été décomposés:

  1. **Somme**: si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs, alors le vecteur $\vec{A} + \vec{B}$ a les composantes $(A_x + B_x, A_y + B_y)$.
  2. **Multiplication par un nombre**: si $\vec{A}$ est un vecteur et a est un nombre réel quelconque, alors le vecteur $a\vec{A}$ a les composantes (aA_x, aB_y).
  3. **Norme**: si $\vec{A}$ est un vecteur de composantes A_x, A_y, alors on défini la *norme* de $\vec{A}$ par le nombre suivant:
  $$\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$
  On note souvent $||\vec{A}||$ ou même parfois simplement juste A pour la norme de $\vec{A}$.

- **Attention**: un vecteur ne peut *jamais* être "égal" à un nombre réel. On ne peut donc *jamais* écrire quelque chose comme "$\vec{A} = 5$". *Cela n'a aucun sens car un vecteur contient plus d'information qu'un nombre réel.*

- Si le point P se déplace au cours du temps, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ dépend du temps. Les composantes sont donc des fonctions du temps: $x(t)$ et $y(t)$.
- **Rappel de trigonométrie**: Pour un triangle rectangle comme sur la figure 3, on a les relations suivantes:

$$h^2 = a^2 + b^2 \qquad a = h\cos\alpha$$
$$\tan\alpha = b/a \qquad b = h\sin\alpha$$

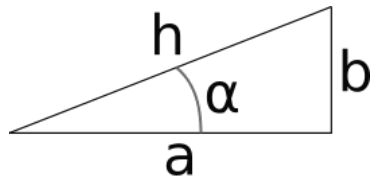

Figure 3: Les relations entre les paramètres a, b, h et α dans un triangle rectangle seront utiles pour décomposer des vecteurs.

Cinématique

- On s'intéresse à un point $P(t)$ se mouvant dans un espace à deux ou trois dimensions. Dans le cas le plus général à trois dimensions, on utilie un point de référence O un système d'axes $Oxyz$.
- **Notation**: Le vecteur position est noté $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t)$ et ses coordonnées sont $(x(t), y(t), z(t))$.
- **Définition**: Le vecteur vitesse est $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.
- **Définition**: Le vecteur accélération est $\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$.
- Ces définitions s'adaptent trivialement si le point se meut dans un espace deux dimensions.
- Nous avons discuté des mouvements suivant au cours:

  1. Le ***Mouvement Circulaire*** (MC): le point P est contraint à se déplacer sur un cercle de rayon R, où R est un nombre positif. Si le mouvement à lieu dans le plan xy, alors on peut toujours écrire

  $$x(t) = R\cos\theta(t) \qquad y(t) = R\sin\theta(t)\,, \tag{2}$$

  où $\theta(t)$ est une certaine fonction du temps.

  Cas particulier: le ***Mouvement Circulaire Uniforme*** (MCU) est par définition un mouvement circulaire avec la contrainte supplémentaire suivante sur $\theta(t)$:

  $$\theta(t) = \theta_0 + \omega t\,, \tag{3}$$

  où θ_0 et ω sont des constantes. On appelle θ_0 la *phase* et ω la *vitesse angulaire.* Si $\omega > 0$ (resp. $\omega < 0$), le point tourne dans le sens *anti-horlogique* (resp. *horlogique*). La *période* T est donnée par

  $$T = \frac{2\pi\ rad}{|\omega|}\cdot \tag{4}$$

2. Le ***Mouvement Parabolique*** (aussi appelé le ***Mouvement Balistique***): il correspond aux trajectoires telles que l'accélération est constante, verticale et vers le bas; traditionnellement nous mettons l'axe des z à la verticale et vers le haut, et le mouvement est alors:
$$x(t) = x_0 + v_{0x}t\,, \qquad z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\,, \tag{5}$$
où x_0, z_0, v_{0x}, v_{0z} et g sont des constantes. La valeur de g est positive et sur Terre elle vaut approximativement
$$g = 10m/s^2. \tag{6}$$
Les autres constantes sont fixées par les conditions initiales du problème.

- **Formules utiles:**

1. On considère l'équation suivante pour l'inconnue x:
$$ax^2 + bx + c = 0\,, \tag{7}$$
où a, b et c sont des constantes. Alors on définit le *discriminant* Δ, par la formule
$$\Delta = b^2 - 4ac\,. \tag{8}$$
Si $\Delta > 0$, alors l'équation (7) possède *deux* solutions que l'on note x_+ et x_- et qui sont données part
$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\,. \tag{9}$$
Si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une solution, à savoir $-b/2a$. Si $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de solution réelle à l'équation (7).

2. Les fonctions sinus et cosinus sont telles que
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,, \tag{10}$$
et ce pour n'importe quelle valeur de l'angle α.

2 Exercices à préparer

Attention! Ces exercices **ne** seront **pas** corrigés durant la séance, mais les solutions seront disponibles sur l'UV.

1. Que valent les coordonnées x et y du point P de la figure 4? $x = 3, y = 2$

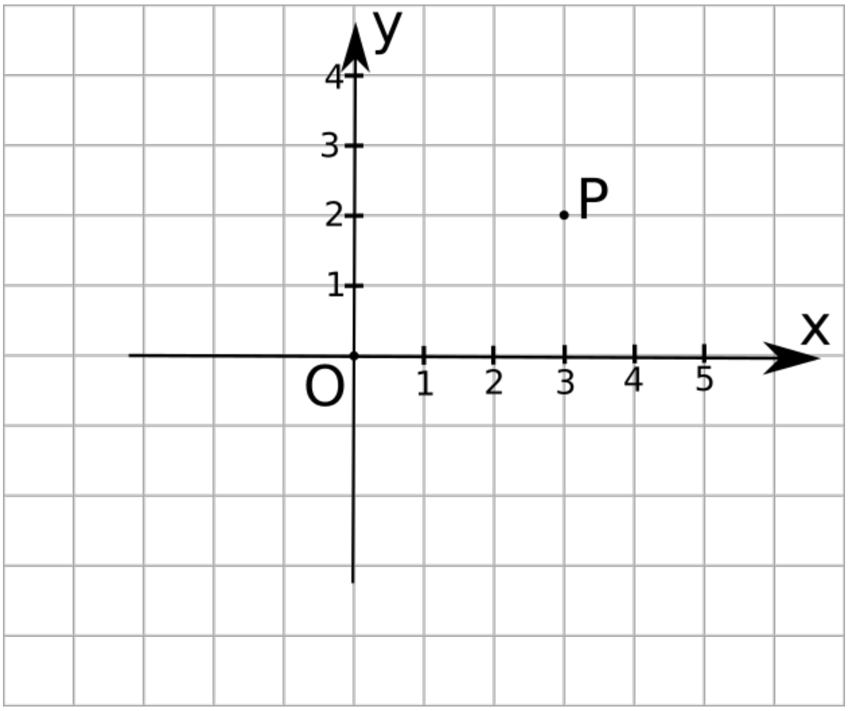

Figure 4: On demande les coordonnées x et y du point P.

2. Que vaut la somme des vecteurs $(1, 0)$ et $(-1, -1)$? $(0, -1)$
3. Que vaut la norme du vecteur position dans le cas du Mouvement Circulaire défini en (2)? $r = R$
4. Si le vecteur position vaut $r(t) = (vt, 0, 0)$ où v est une constante, que valent les vecteurs vitesse et accélération? $\vec{v} = (v, 0, 0), \vec{a} = (0, 0, 0)$

3 Exercices

Les exercices marqués d'une étoile sont à résoudre en priorité.

⋆ 1. On considère le système d'axes Oxy et les 4 points P_1, P_2, P_3 et P_4 sur la figure 5.

   (a) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ et $\overrightarrow{OP_4}$.

   (b) Que vaut le vecteur $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O.

   (c) Que vaut le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_2}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O.

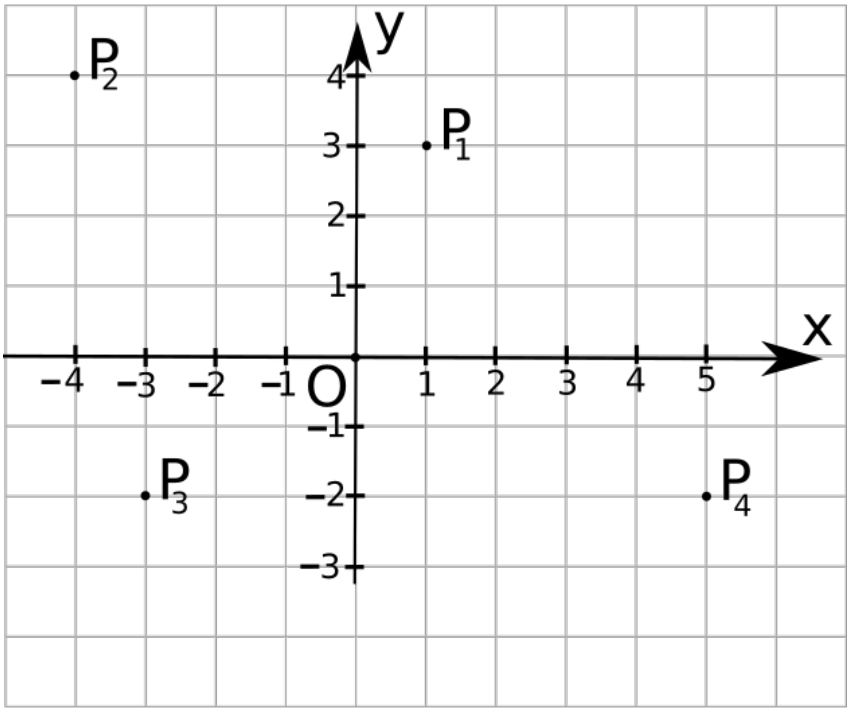

Figure 5: On utilise les coordonnées par rapport au système d'axes Oxy.

2. Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs comme sur la figure 6.

   (a) Que valent les composantes de ces vecteurs?

   (b) Que valent les normes A, B et C?

   (c) Que vaut la somme $\vec{A}+\vec{B}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O.

   (d) Que vaut la différence $\vec{A}-\vec{B}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O.

   (e) Calculer la norme des vecteurs $\vec{A}+\vec{B}$ et $\vec{A}-\vec{B}$.

   (f) Que vaut l'angle que fait $\vec{C}$ avec l'horizontale et avec la verticale? On rapporte ici les angles à leurs valeurs dans le premier quadrant, c'est-à-dire compris entre 0 et $\pi/2rad$.

⋆ 3. On considère un point dont le vecteur de vitesse $\vec{V}$ est représenté sur la figure 7. On note α l'angle qu'il fait avec l'horizontale et V sa norme. Que valent les composantes V_x et V_y en fonction de α et V?

4. Même question que ci-dessus, mais cette fois le vecteur est donné sur la figure 8 et α est l'angle pris par rapport à la verticale. $\vec{V} = -V(\sin\alpha, \cos\alpha)$

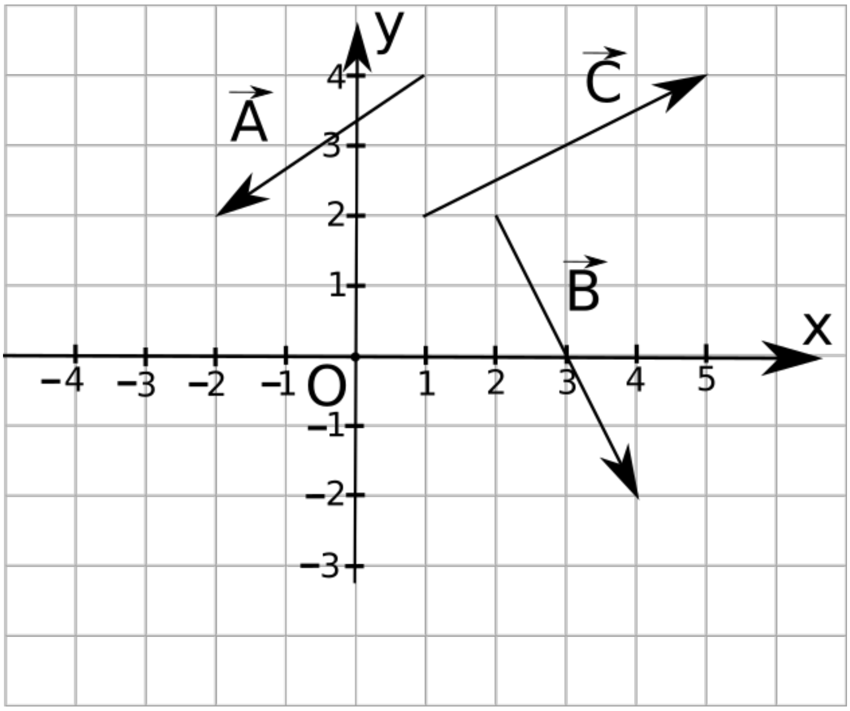

Figure 6: Trois vecteurs à différences angles et différents points de localisation.

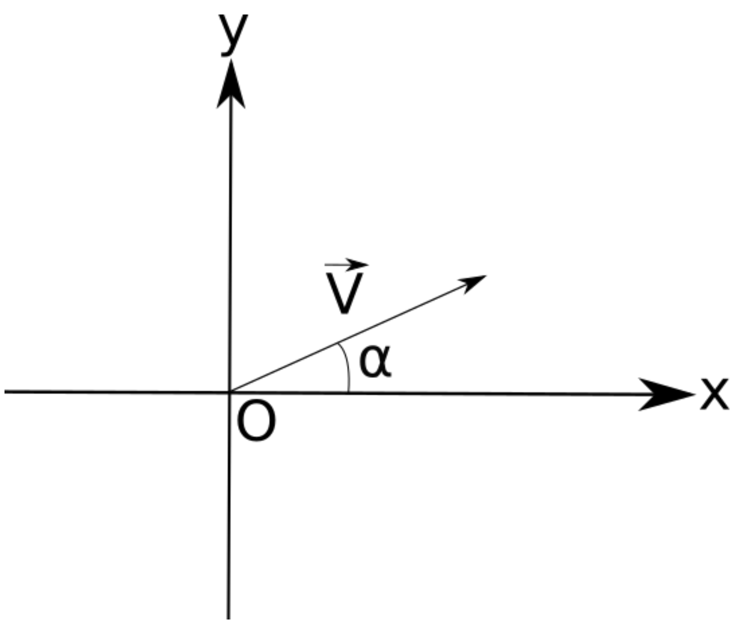

Figure 7: Le vecteur $\vec{V}$ fait un angle α avec l'horizontale.

$\star$ 5. **(Mouvement Circulaire Uniforme)** On considère un point P décrivant un mouvement circulaire uniforme dans le plan Oxy et centré en O. Le mouvement est tel qu'en $t = 0s$, le point se trouve en P_0 qui est de coordonnées $(5m, 0)$. Le sens de rotation est anti-horlogique, et il faut $10s$ pour faire exactement un tour complet.

a. Que vaut le rayon R de ce mouvement circulaire?

b. Représenter sur la figure 9 le point P_0.

c. Que vaut la phase θ_0? (On suppose qu'elle est comprise entre 0 et 2π.)

d. Que vaut la vitesse angulaire ω?

e. Quelles sont les coordonnées du point P lorsque $t = 4s$? Représenter approximativement ce point sur la figure 9.

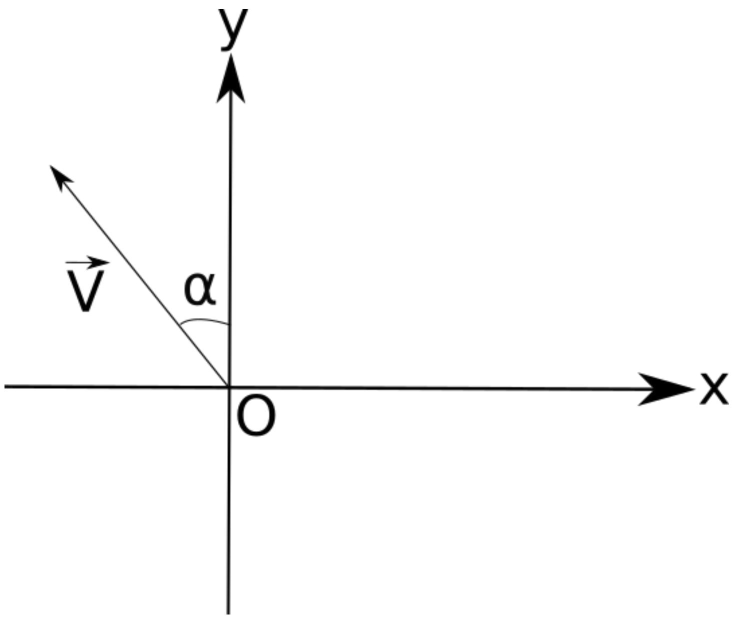

Figure 8: Le vecteur $\vec{V}$ fait un angle α avec la verticale.

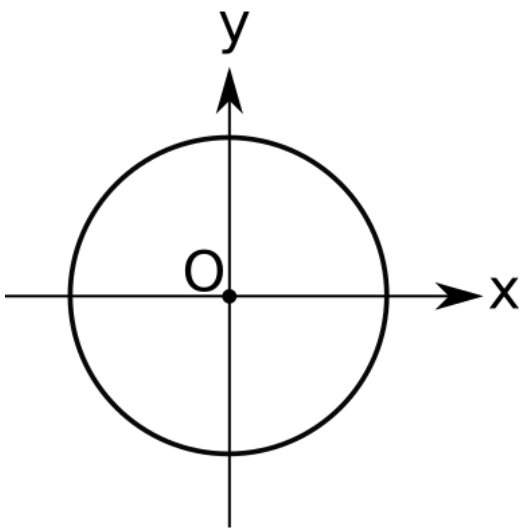

Figure 9: Un cercle dans le système d'axes Oxy.

f. A quel instant t_1 le point P croise l'axe des y pour la première fois?

g. A quel instant t_2 le point P croise l'axe des y pour la deuxième fois?

h. Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ pour n'importe quelle valeur de t.

i. Représenter sur la figure 9 le vecteur vitesse au temps $t = 0s$, t_1 et t_2.

j. Calculer le vecteur accélération $\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t))$ pour n'importe quelle valeur de t.

k. Représenter sur la figure 9 le vecteur accélération au temps $t = 0s$, t_1 et t_2.

$\star$ 6. **(Mouvement Parabolique)** On considère un point P se mouvant dans le plan Oxz et suivant un mouvement parabolique. Au temps $t = 0s$, le point se trouve sur le point de référence O (placé au niveau du sol), sa vitesse fait un angle $\alpha = 13°$ avec l'horizontale et la norme de sa vitesse vaut $v_0 = 5m/s$. Voir figure 10 pour un récapitulatif.

a. Que valent les composantes v_{0x} et v_{0z} de la vitesse initiale?

b. On note $t_\star$ l'instant où le point P retombe par terre. Que vaut ce temps?

c. Calculer la coordonnée x du point d'impact (on la note $x_\star$).

d. Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_z(t))$ pour n'importe quelle valeur de t.

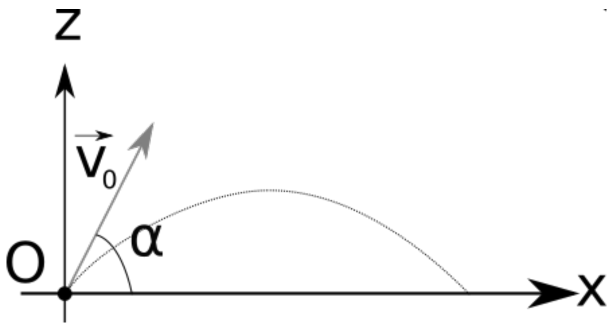

Figure 10: Une trajectoire parabolique dans le plan Oxz.

e. Que vaut $\vec{v}(t_\star)$? Representer ce vecteur sur la figure 10.

f. Quel angle fait $\vec{v}(t_\star)$ avec l'axe des x?

g. A quel instant t_{max} le point P atteint-il sa hauteur maximale? (Rappel: il suffit de résoudre $z'(t) = 0$, voyez-vous pourquoi?)

h. Que vaut la vitesse en t_{max}? Representer ce vecteur sur la figure 10.

i. Calculer le vecteur accélération $\vec{a}(t) = (a_x(t), a_z(t))$ pour n'importe quelle valeur de t.

j. Que vaut $\vec{a}(t)$ pour $t = 0s, t = t_\star$ et $t = t_{\text{max}}$? Representer ces vecteurs sur la figure 10.

7. **(Mouvement Parabolique)** On reprend la configuration de la figure 10, mais cette fois les paramètres v_0 et α ne sont pas connus. On impose cependant que la hauteur maximale de la trajectoire soit $h = 15m$ et que l'impact avec le sol ait lieu en $x_\star = 9m$. Que doivent valoir les paramètres v_0 et α pour que cela soit possible? (Aide: inspirez-vous des étapes de la question précédente.) $v_0 = 17.5m/s, \alpha = 81.5°$

8. **(Mouvement Circulaire Uniforme et Mouvement Parabolique)** On considère le problème à trois dimensions suivant. Un point P se déplace dans le plan xy et effectue un MCU centré sur O. Nous pouvons donc prendre, pour ses coordonnées (x_P, y_P, z_P), les formules suivantes:

$$x_P(t) = R\cos(\omega t + \theta_0)\,, \qquad y_P(t) = R\sin(\omega t + \theta_0)\,, \qquad z_P(t) = 0\,, \tag{11}$$

où R et ω sont des nombres positifs et θ_0 est compris entre 0 et $2\pi rad$. Au temps $t = 0s$, le point P se trouve en $(0, -9m, 0)$. Un autre point, Q, suit un mouvement parabolique dans le plan yz, et nous pouvons donc supposer que ses coordonnées (x_Q, y_Q, z_Q) prennent la forme

$$x_Q(t) = 0\,, \qquad y_Q(t) = y_0 + v_{0y}t\,, \qquad z_Q(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\,, \tag{12}$$

où y_0, v_{0y}, z_0 et v_{0z} sont des nombres réels. Au temps $t = 0s$, le point Q est en O et a une vitesse $\vec{v}_0$ de norme $v_0 = 15m/s$. Voir figure 11 pour un récapitulatif.

a. Déterminer les valeurs de R, θ_0, y_0, z_0. $R = 9m, y_0 = z_0 = 0, \theta_0 = -\frac{\pi}{2}rad$

b. Déterminer l'angle α que doit faire la vitesse initiale de Q avec l'axe des y afin que Q atteigne $(0, 9m, 0)$. $\alpha = 11,789°$

c. Que doit valoir ω pour que le point P et Q s'interceptent lors du premier tour de P? $\omega = 5,12rad/s$

d. Que doit valoir ω pour que le point P et Q s'interceptent après que le point P ait complété 5 tours? $\omega = 56,4rad/s$

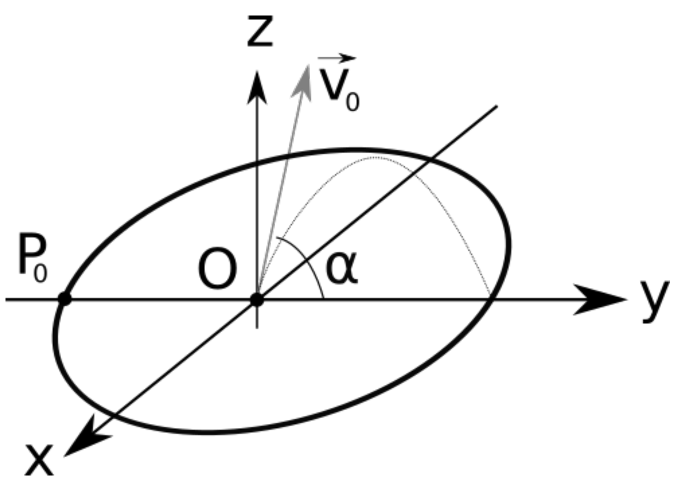

Figure 11: La trajectoire circulaire a lieu dans le plan Oxy et le mouvement parabolique dans le plan Oyz.