Université Libre de Bruxelles

Année Académique 2023-2024 *PHYS-G1102*

Physique appliquée aux sciences de la Vie *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Médecine et en Sciences Dentaires

Série d'exercice n° 5

Moment de force et Centre de Gravité

Solutions finales des exercices à préparer et des exercices non-étoilés

1 Rappels

- **Définition:** pour deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, dont les composantes dans un système d'axes cartésiens $Oxyz$ comme sur la figure 1 sont respectivement notées (A_x, A_y, A_z) et (B_x, B_y, B_z), on définit le *produit vectoriel* $\vec{A} \times \vec{B}$ par les formules:

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_x = A_y B_z - A_z B_y \,, \tag{1}$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_y = A_z B_x - A_x B_z \,, \tag{2}$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_z = A_x B_y - A_y B_x \,. \tag{3}$$

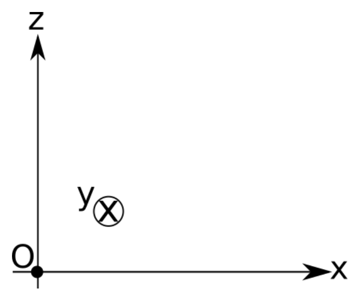

Figure 1: Système d'axes utilisé dans la définition des composantes de $\vec{A} \times \vec{B}$.

- **Propriété:** le vecteur $\vec{A} \times \vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Son sens est donné par la règle de la main droite.

- **Propriété:** la norme du vecteur $\vec{A} \times \vec{B}$ est donnée par

$$||\vec{A} \times \vec{B}|| = AB \sin\theta \,, \tag{4}$$

où A (resp. B) est la norme de $\vec{A}$ (resp. $\vec{B}$) et θ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et compris entre 0 et $\pi \, rad$.

- **Définition:** un *corps solide* est un corps tel que la distance entre n'importe quel de ses points reste constante.

- **Définition:** Pour un point P décrivant un mouvement circulaire (pas nécessairement uniforme) de rayon R autour d'un point O, on définit les vecteurs suivants:

$$\text{Vecteur vitesse angulaire: } \vec{\omega} = R^{-2}\vec{r} \times \vec{v}\,, \tag{5}$$

$$\text{Vecteur accélération angulaire: } \vec{\alpha} = R^{-2}\vec{r} \times \vec{a}\,, \tag{6}$$

  où $\vec{r}$ est le vecteur position $\overrightarrow{OP}$, et $\vec{v}, \vec{a}$ sont respectivement la vitesse et l'accélération correspondantes.

- **Propriété:** le vecteur $\vec{\alpha}$ est la dérivée par rapport au temps du vecteur $\vec{\omega}$. En particulier, si $\vec{\alpha}$ est nul, alors $\vec{\omega}$ est *constant.*

- **Définition:** Lorsqu'une force $\vec{f}$ est appliquée en un point P d'un solide, on définit, pour n'importe quel point de référence O, le *moment de la force $\vec{f}$ par rapport à O* comme le vecteur

$$\vec{\tau}_O(\vec{f}) = \overrightarrow{OP} \times \vec{f}\,. \tag{7}$$

- **Propriété:** (*conditions d'équilibre des corps solides*) Pour un corps solide dont tous points sont immobiles par rapport à un point de référence O, on a nécessairement les conditions suivantes:

$$\vec{F} = \vec{0} \qquad \text{(Absence d'accélération globale du solide)}\,, \tag{8}$$

$$\vec{\tau}_O = \vec{0} \qquad \text{(Absence d'accélération angulaire)}\,, \tag{9}$$

  où $\vec{F}$ est la force totale et $\vec{\tau}_O$ est le moment total par rapport à O.

- Pour un corps solide, la force de pesanteur s'exerce sur tous les points du solide. Le moment de force total correspondant peut alors être calculé facilement si l'on connait la position du *centre de gravité* du corps:

- **Propriété:** pour un corps solide de masse m et de centre de gravité C_{G}, le moment de force total $\vec{\tau}_O(\vec{P})$ par rapport à O de la force de pesanteur est donné par

$$\vec{\tau}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OC_{\mathrm{G}}} \times \vec{P}\,, \tag{10}$$

  où $\vec{P}$ est le poids total du corps, $\vec{P} = m\vec{g}$.

- **Définition:** Pour un ensemble de N corps ponctuels de masses $m_1, \ldots, m_N$ et de position $P_1, \ldots, P_N$, le centre de gravité C_{G} est donné par la formule

$$\overrightarrow{OC_{\mathrm{G}}} = \frac{1}{M}\left(m_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + m_N\overrightarrow{OP_N}\right)\,, \tag{11}$$

  où O est un point de référence quelconque et $M = m_1 + \cdots + m_N$ est la masse totale du système.

- **Remarque:** la formule (11) peut être adaptée aux systèmes dont la masse est distribuée de façon continue, comme c'est le cas des solides (non couvert par le cours). De plus, elle n'est valable que dans l'approximation où l'accélération gravitationnelle $\vec{g}$ est homogène.

- On rappelle également que lorsque la force totale $\vec{F}$ sur un corps est nulle, alors le moment de force total $\vec{\tau}_O$ ne dépend pas du point O. En pratique, cela signifie que nous sommes libres de choisir, dans ces cas, le point par rapport auquel le moment de force total est calculé.

2 Exercices à préparer

Attention! Ces exercices **ne** seront **pas** corrigés durant la séance, mais les solutions seront disponibles sur l'UV.

1. Que vaut le produit vectoriel $(1, 0, 0) \times (0, 2, 0)$? (0,0,2)

2. Vrai ou Faux? Si la force totale s'exerçant sur un corps solide est nulle, alors le moment de force total est également nul. Faux

3. Que vaut le moment de force en C_{G} du poids d'un corps solide? 0

4. Vrai ou Faux? Le centre de gravité C_{G} d'un solide est nécessairement un point faisant partie du solide. Faux

3 Exercices

Les exercices marqués d'une étoile sont à résoudre en priorité.

⋆ 1. (Cinématique Angulaire) On considère un corps ponctuel de masse $m = 5\,kg$ décrivant un MCU dans le plan horizontal Oxy, centré en O et rayon $R = 3\,cm$. La trajectoire est donnée par

$$\vec{r}(t) = R(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)\,, \tag{12}$$

où $\omega = \pi/5\,rad/s$. Voir figure 2 pour un récapitulatif.

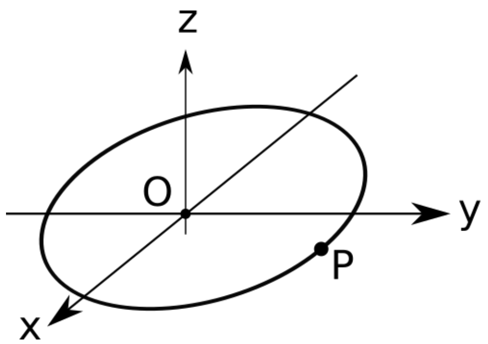

Figure 2: On utilise le système d'axes $Oxyz$, le mouvement ayant lieu uniquement dans le plan Oxy.

a. Que vaut la force $\vec{F}$ exercée sur le corps? Vous pouvez exprimer votre réponse en fonction de m, ω et $\vec{r}(t)$. Représenter le résultat sur la figure 2 pour le point P.

b. En partant du résultat de la question précédente, calculer le moment de force $\vec{\tau}_O(\vec{F})$ par rapport au point O de la force $\vec{F}$.

c. En partant de l'expression pour $\vec{r}(t)$, calculer le vecteur de vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Représenter $\vec{\omega}$ sur la figure 2, par exemple en le localisant au point P.

d. En partant du résultat de la question précédente, calculer l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$, et vérifier ensuite la cohérence de votre réponse avec la valeur trouvée pour le moment de force $\vec{\tau}_O(\vec{F})$.

⋆ 2. (Levier - démonstration du cours) On considère une tige rigide horizontale et immobile de longueur totale L et de masse négligeable. On appelle A (resp. B) son extrêmité gauche (resp. droite). Le point P situé à une distance d de A et sur la tige est fixé à un pivot dont nous négligeons les éventuels frottements (on prend, évidement, $d < L$). Voir figure 3 pour un récapitulatif. La tige est reliée au sol par un corde tendue attachée en A, et un corps ponctuel de masse m se trouve en B.

a. Que vaut le moment de force $\vec{\tau}_P(\vec{T})$ par rapport à P de la force $\vec{T}$ exercée par la corde sur la tige? Exprimer votre réponse en fonction de la norme T de $\vec{T}$ ainsi que du paramètre d.

b. Que vaut le moment de force $\vec{\tau}_P(\vec{P})$ par rapport à P du poids $\vec{P}$ de la masse m? Exprimer votre réponse en fonction de m, g, L et d.

c. On suppose que la tige n'est pas en rotation. Que vaut alors T en fonction des paramètres du problème?

d. Que vaut la force $\vec{f}$ exercée par le pivot sur la tige?

e. Expliquer pourquoi $\vec{f}$ ne joue aucun rôle dans le bilan de moment de force par rapport à O.

f. Application numérique: calculer $\vec{T}$ et $\vec{f}$ pour $L = 150\,cm, d = 30\,cm$ et $m = 100\,g$.

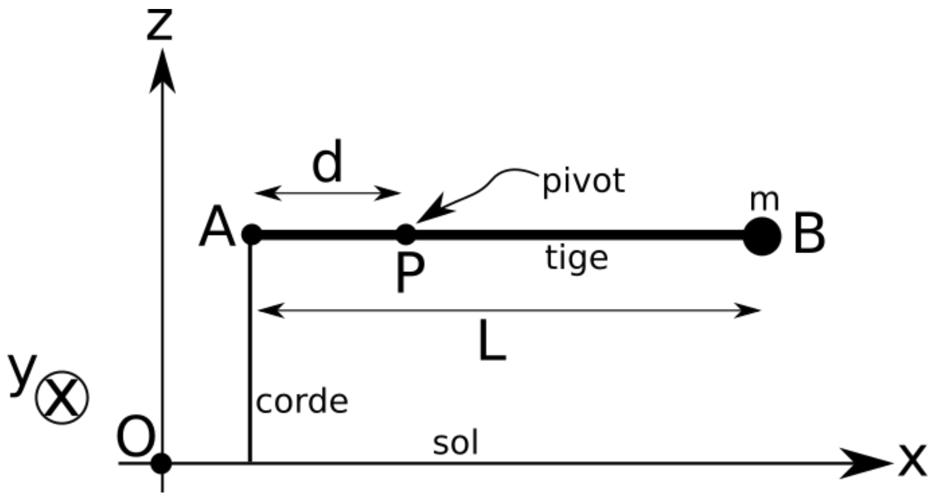

Figure 3: La tige rigide est fixée au sol par un corde et une masse m est attachée à l'autre extrêmité.

3. (Levier - application biomédicale) Un humain tient un livre de 2kg dans la main droite. Parmi les muscles sollicités dans cette position on trouve le *muscle brachial*, qui s'insère sur l'ulna comme illustré sur la figure 4. Le but de cet exercice est d'estimer, dans un modèle simple, la tension dans ce muscle. On néglige dans cette question la masse de l'avant-bras et du muscle brachial.
   On suppose que l'insertion du muscle brachial se fait avec un angle de $\theta = 30°$ et à une distance de $d = 4\,cm$ du coude. La distance entre le coude et la main est $L = 30\,cm$. On suppose de plus que l'avant-bras est incliné de $\alpha = 10°$ vers le bas. On dénote respectivement le coude, l'insertion et la main par les points A, B et C; voir figure 5 pour un récapitulatif du modèle ainsi le système d'axes à utiliser.

   

   Figure 4: Représentation du muscle brachial d'un bras droit et son insertion sur l'ulna.

   Déterminer la valeur de la tension dans le muscle brachial en utilisant la condition d'équilibre des moments de force en A.

   $T = \frac{Lmg\cos\alpha}{d\sin\theta} = 295N$

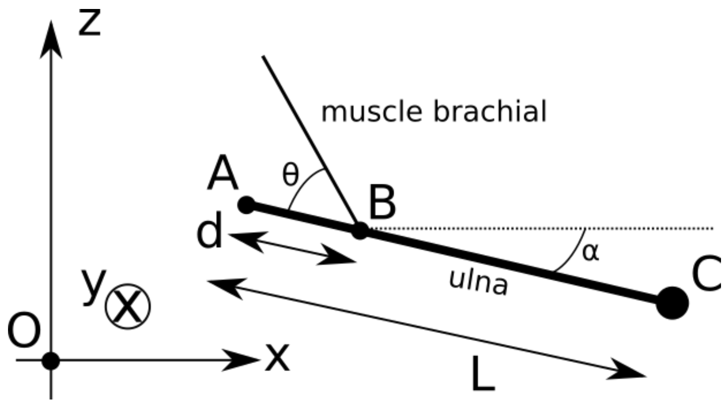

Figure 5: Modèle pour le système constitué de l'avant-bras, du muscle brachial et de la main.

4. (Levier - relation avec le travail) Grâce à l'utilisation d'un levier, nous sommes capable de démultiplier notre force. En particulier, nous pouvons soulever des charges très importantes à mains nues. Le but de cet exercice est de vérifier que cette possibilité est compatible avec les équations de bilan d'énergie mécanique.
On considère une charge de masse $M = 150kg$ attachée bout d'un levier (point A) à une distance $d = 10\,cm$ du pivot (point P). Initialement, la charge est posée au sol et le levier forme un angle θ avec l'horizontale. Un humain exerce une force $\vec{f}$, orientée vers le bas et de norme f inconnue, à l'autre bout du levier à une distance $D = 2m$ du pivot (point B). On suppose que la vitesse angulaire du levier est constante durant la poussée, et on néglige la masse du levier. On se réfère à la figure 6 pour la définition du système d'axes à utiliser.

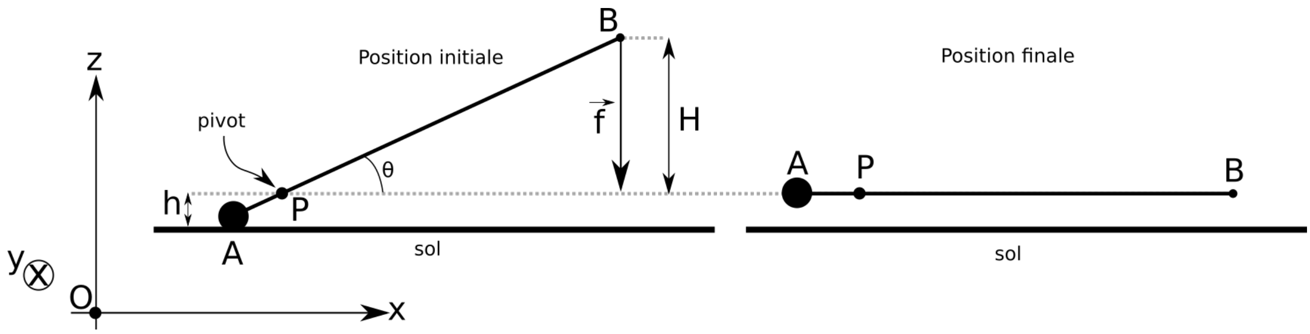

Figure 6: Un humain soulève une masse très importante grâce à un levier en appliquant une force $\vec{f}$ sur le point B. A gauche, on voit la position initiale, avec la masse en A posée sur le sol. A droite, la masse a été soulevée d'une hauteur $h = 2\,cm$. Le point P représente le pivot et est immobile. La distance entre A et P vaut $d = 10\,cm$ et la distance entre P et B vaut $D = 2\,m$.

a. Que vaut l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ du levier? $\vec{\alpha} = 0$
b. Dans quel sens la vitesse anguilaire $\vec{\omega}$ est-elle orientée? Dans le sens de l'axe Oy.
c. En utilisant la condition d'équilibre des moments de force, déterminer la valeur de f. $f = dP/D = 75N$
d. On suppose que la charge est soulevée d'une hauteur $h = 2cm$. Le levier est alors en position horizontale comme sur la partie droite de la figure 6. Quelle est la variation de hauteur H du point B? $H = Dh/d = 0.4m$
e. Quel est le travail effectué par l'humain pour ce déplacement? $W_f = fH = 30J$
f. Quelle est la variation d'énergie potentielle de la charge? $\Delta E_p = mgh = 30J$
g. Que vaut la variation d'énergie cinétique de la charge? Vérifier numériquement la cohérence de votre réponse avec les résultats des deux sous-questions précédente et le théorème de

la conseration de l'énergie mécanique. Vitesse de norme constante, donc $\Delta E = \Delta E_p$ qui vaut bien $30J$.

h. Mêmes questions que ci-dessus mais cette fois en gardant les valeurs de M, d, D et h quelconques. $W_f = fH = Ph = mgh = \Delta E_p$

⋆ 5. (Calcul de centre de gravité) On considère un système constitué de deux tiges rigides de masses négligeables, au bout desquelles sont fixées des masses. Les tiges sont reliées par un fil, et le tout est suspendu au plafond. Le système est représenté sur la figure 7, où l'on spécifie les points d'attache des différents éléments, à savoir les points $P_1, P_2, P_3, P_4, O, B_1$ et B_2. Les tiges sont horizontales, les fils sont tendus et verticaux, et le tout est immobile.
Les masses m_1, m_2, m_3 et m_4 sont fixées aux points P_1, P_2, P_3 et P_4 respectivement. Le point O, que nous prenons comme point de référence, correspond au point d'attache du fil faisant lien avec le plafond. Le second fil, liant les deux tiges, est fixé aux points B_1 et B_2. On rappelle qu'on néglige les masses des fils dans tous les exercices.
On note $\vec{T}, \vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ les forces exercées par les fils aux points O, B_1 et B_2 et $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ et $\vec{P}_4$ les poids des masses m_1, m_2, m_3 et m_4 respectivement.
Afin d'alléger les notations, on défini les paramètres suivants: $d_1 = ||\overrightarrow{OP_1}||, d_2 = ||\overrightarrow{OP_2}||, x = ||\overrightarrow{OB_1}||, d_3 = ||\overrightarrow{B_2P_3}||, d_4 = ||\overrightarrow{B_2P_4}||$.

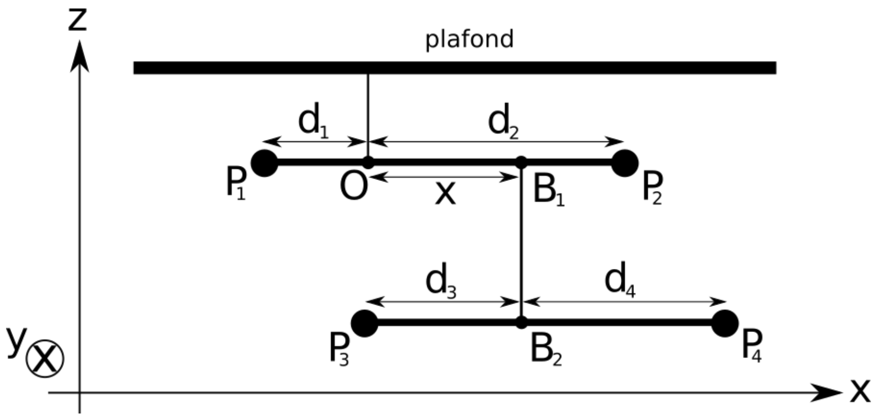

Figure 7: Représentation d'un mobile, avec les points d'attache des différents éléments.

a. Que valent les vecteurs $\vec{T}, \vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ en fonction des masses m_1, m_2, m_3 et m_4?

b. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OC_{G_1}}$ localisant le centre de gravité C_{G_1} de la tige supérieure. Exprimer votre réponse en fonction des paramètres m_1, m_2, d_1 et d_2.

c. En calculant le moment de force total sur la tige supérieure, déterminer la valeur que doit avoir x en fonction de m_1, m_2, m_3, m_4, d_1 et d_2 afin que ce système soit immobile.

d. En procédant de façon similaire avec la tige inférieure, déterminer la valeur du rapport d_3/d_4.

⋆ 6. (Equilibre d'un bipède) Un humain de masse M se trouve debout sur le sol et tient, dans sa main gauche, une corde à laquelle est suspendu un corps ponctuel de masse m. On note P la position de cette masse. Le centre de gravité C_G de l'humain et P se situent tous deux à une hauteur h du sol, et on note $D = ||\overrightarrow{C_GP}||$. On appelle respectivement A_1 et A_2 les points de contact entre le sol et les pieds gauche et droit. De plus, on place le point de référence O au niveau du sol, en-dessous de C_G. Les distances $||\overrightarrow{OA_1}||$ et $||\overrightarrow{OA_2}||$ sont supposées être égales, et on note d cette valeur, et on suppose $d < D$. On note aussi $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ les forces normales exercées par le sol sur cette personne et localisées aux points A_1, A_2 respectivement.

L'ensemble du système est immobile, voir figure 8 pour un récapitulatif.

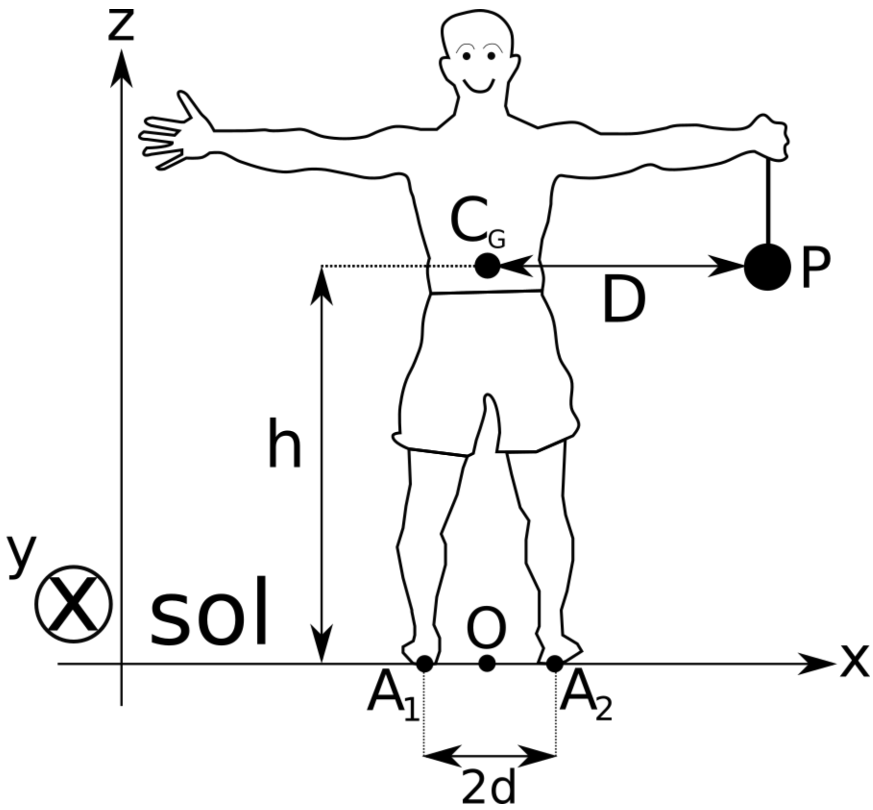

Figure 8: L'équilibre de cette personne dépend de la position du centre de gravité du système total.

a. Que vaut la somme $\vec{N}_1 + \vec{N}_2$?

b. Où se trouve le centre de gravité total $C_{\mathrm{G,tot}}$ du système constitué de cette personne et de la masse m? Exprimer les composantes de $\overrightarrow{OC}_{\mathrm{G,tot}}$ en fonction de h, D, M et m.

c. Déterminer les valeurs de N_1 et N_2 en imposant la condition d'équilibre des moments de force en O.

d. Si la masse m est progressivement augmentée, on s'attend à ce que le système se mette à basculer à partir d'une certaine valeur critique $m_\star$. Déterminer $m_\star$ telle que le système reste immobile si $m \leq m_\star$ et se mette en rotation lorsque $m > m_\star$. *(Indice: n'oubliez pas qu'une norme est toujours un nombre positif.)*

e. Où se trouve le centre de gravité total $C_{\mathrm{G,tot}}$ lorsque $m = m_\star$? Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OC}_{\mathrm{G,tot}}$ en fonction des paramètres d et h, et interpréter le résultat géométriquement. Que valent alors N_1 et N_2?

f. Montrer que la masse critique $m_\star$ peut dépasser M pour autant que la distance entre les pieds est supérieure à D.

7. (Déplacement d'une dent) Une dent est constituée d'une partie visible, appelée *couronne*, ainsi que d'une partie cachée dans la gencive appelée *racine*. On s'intéresse ici au cas où un appareil dentaire est placé chez le patient, le but étant que les forces exercées par l'appareil soient telles que

- leur somme $\vec{f}$ soit horizontale à la gencive et de norme $f = 10N$,
- le moment de force total sur la dent soit nul.

La force de résistance de la gencive s'exerce à plusieurs endroits sur la racine, et s'ajuste en fonction des autres forces exercées par l'appareil dentaire. De façon analogue au cas de la pesanteur, le moment de force total dû à la force de résistance est facilement calculé si l'on connait le *centre de résistance*, noté C_{R}, de la dent: si on note $\vec{G}$ la force totale exercée par la gencive sur la dent, et $\vec{\tau}_O(\vec{G})$ le moment de force total en O dû à la résistance de la gencive, on a

$$\vec{\tau}_O(\vec{G}) = \overrightarrow{OC_{\mathrm{R}}} \times \vec{G} \,. \tag{13}$$

L'appareil dentaire est fixé à la couronne en deux points notés A_1 et A_2. Ils sont à la même hauteur, et les forces exercées par l'appareil sur la dent en ces points sont notées $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ respectivement. Le réglage de l'appareil est tel que ces forces sont verticales, avec $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$. Une troisième force $\vec{f}_3$, exercée en un point A situé entre A_1 et A_2, est horizontale et dirigée vers la droite sur la figure 9. On suppose de plus que le centre de résistance C_{R} est situé en-dessous de A à une distance L de celui-ci. La distance entre A_1 et A_2 est notée d.

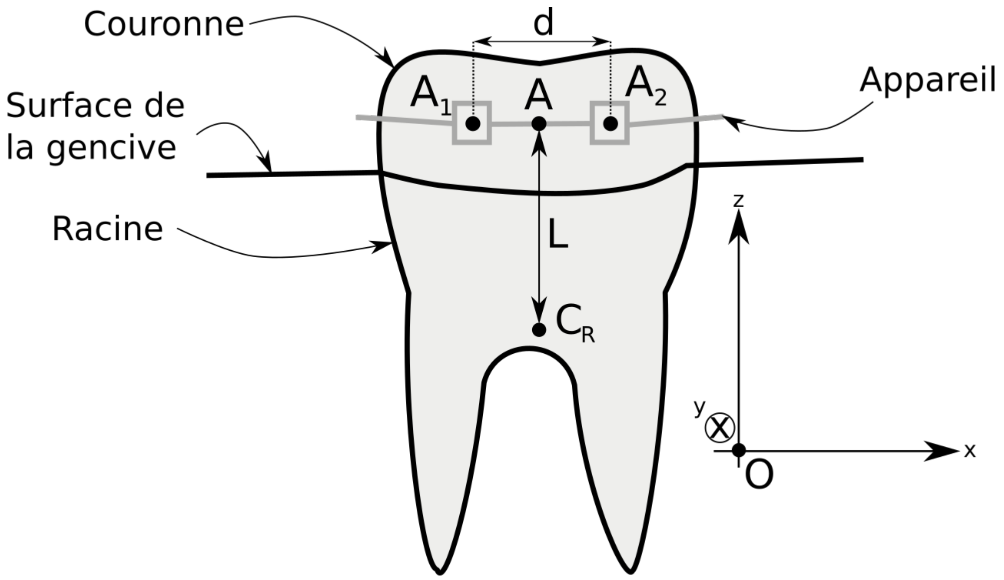

Figure 9: On suppose que le réglage de l'appareil dentaire permet de choisir les normes des forces exercées en A_1, A_2 et A.

On néglige dans ce problème les effets de la gravitation.

a. Que vaut $\vec{f}_3$? Donner la valeur numérique. $\vec{f}_3 = (10N, 0, 0)$

b. Que vaut la force totale $\vec{G}$ exercée par la gencive? $\vec{G} = (-10N, 0, 0)$

c. Dans quel sens le moment de force en C_{R} de $\vec{f}_3$ pointe-t-il? En déduire les sens des forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$. $\vec{f}_1 = (0, 0, -f_1) = -\vec{f}_2$

d. Déterminer la valeur que doit prendre la norme f_1 afin que le moment de force total s'annule. Exprimer votre réponse en fonction de f, d et L, et faites l'application numérique avec $d = 4mm$ et $L = 6mm$. $f_1 = Lf/d = 15N$

e. En pratique, on peut utiliser une clé dynamométrique afin de régler le moment de force en A (et non en C_{R}) dû aux forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$. Que vaut la norme de $\vec{\tau}_A(\vec{f}_1) + \vec{\tau}_A(\vec{f}_2)$? Donner le résultat numérique, et exprimer votre réponse en $N\,cm$ (Newton $\times$ centimètres), qui sont les unités souvent utilisées dans ce contexte. $df_1 = 6Ncm$