Université Libre de Bruxelles

Année Académique 2023-2024 *PHYS-G1102*

Physique appliquée aux sciences de la Vie *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Médecine et en Sciences Dentaires

Série d'exercice n° 6

Hydrostatique et Hydrodynamique

1 Rappels

- La mécanique des fluides décrit les propriétés des milieux continus tels que l'eau ou l'air. Ce sont des *fluides*, c'est-à-dire qu'ils ont tendance à occuper tout l'espace disponible de leur contenant.
- En *hydrostatique* on se focalise sur les fluides au repos.
- La *masse volumique* ρ est définie par
$$\rho = \frac{m}{V}\,, \tag{1}$$
où m est la masse du fluide et V le volume occupé par ce dernier.
- Lorsqu'un fluide est placé dans un contenant, il exerce une force sur les parois de ce dernier: c'est la *force de pression* $\vec{f}_{\mathrm{p}}$.
- En un point donné de la paroi, cette force est toujours orientée perpendiculairement à la paroi et dirigée vers l'extérieur du contenant.
- Si on note A l'aire de la paroi, alors on défini la *pression*, p, par le rapport:
$$p = \frac{f_{\mathrm{p}}}{A}\,, \tag{2}$$
où f_{p} est la norme de $\vec{f}_{\mathrm{p}}$.
- Les dimensions de p sont: $ML^{-1}T^{-2}$.
- L'unité dans le Système International pour la pression est le *Pascal* (symbole: Pa). Par définition,
$$1\,Pa = 1\,kg.m^{-1}.s^{-2}\,. \tag{3}$$
- En général, la masse volumique ρ dépend de la pression. Lorsque ce n'est pas le cas, on dit que le fluide est *incompressible*.
- La pression de l'air, à la température de 15° et au niveau de la mer, vaut
$$p_{\mathrm{atm}} = 101325\,Pa\,. \tag{4}$$
Dans ce cours, on arrondit cette valeur à $p_{\mathrm{atm}} = 10^5\,Pa$.

- La valeur de p_{atm} est utilisée pour définir une autre unité pour la pression: l'atmosphère (symbole: *atm*) est défini par $1\,atm = 101325\,Pa$.

- La masse volumique de l'eau lorsque la pression vaut $1\,atm$ est notée ρ_0 et vaut
$$\rho_0 = 997\,kg.m^{-3}\,. \tag{5}$$
Dans ce cours, on arrondit cette valeur à $\rho_0 = 1000\,kg.m^{-3}$.

- En très bonne approximation, l'eau est un fluide incompressible: il faut augmenter la pression à $224\,atm$ afin d'augmenter sa masse volumique de 1% par rapport à sa valeur (5).

- Afin de calculer la pression dans un fluide incompressible au repos, nous pouvons utiliser la *loi de Pascal*: pour P_1 et P_2 deux points dans le fluide, la différence de pression $\Delta p = p_2 - p_1$ vaut
$$\Delta p = \rho\vec{g}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}\,, \tag{6}$$
où $\vec{g}$ est la vecteur d'accélération gravitationnelle et ρ est la masse volumique du fluide.

- Lorsqu'un corps solide est immergé (totalement ou partiellement) dans l'eau, la force totale de pression exercée sur le solide est appelée la *force d'Archimède* et est notée $\vec{A}$; elle est donnée par
$$\vec{A} = -\rho V_{\text{i}}\vec{g}\,, \tag{7}$$
où V_{i} est le volume immergé du solide et ρ est la masse volumique du fluide.

- Nous considérons également les fluides *en mouvement*, typiquement un fluide s'écoulant dans une conduite cylindrique.

- **Définition:** si un volume de fluide ΔV s'écoule sur un intervalle de temps Δt, on définit le *débit* Q par
$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}\,. \tag{8}$$

- Dans ce cours, on ne considère que des écoulements qui satisfont à la *conservation du débit*: par exemple, en l'absence de bifurcation dans le circuit, le débit Q doit être le même quel que soit l'endroit où il est calculé.

- En chaque point P du fluide et à chaque instant t on peut considérer la vitesse $\vec{v}(P,t)$ de l'élément de fluide en P. On appelle ceci le *champ de vitesse* du fluide.

- Pour une section d'aire S d'une conduite telle que
  - la section est perpendiculaire au champ de vitesse,
  - la vitesse v est constante sur la section,

  on a la relation
$$Q = vS\,\cdot \tag{9}$$

- Pour un instant t fixé, on définit les *lignes de courant* comme étant les courbes partout tangentes au champ de vitesse.

- Outre la conservation du débit, nous faisons également les hypothèses suivantes:
  - le fluide est incompressible (cf. hydrostatique),
  - le fluide est non-visqueux (absence de forces de friction),
  - l'écoulement est laminaire (écoulement non-turbulent),

– l'écoulement est stationnaire (le champ de vitesse ne dépend pas de t).

- Dans ces conditions, on a alors le *théorème de Bernoulli*: Pour un point P du fluide, la quantité
$$\frac{1}{2}\rho v^2 - \rho \vec{g} \cdot \overrightarrow{OP} + p \tag{10}$$
où $\vec{g}$ est le vecteur d'accélération gravitationnelle, v et p sont respectivement la norme de la vitesse et la pression en P, et où O est un point de référence quelconque, est *conservée* le long des lignes de courant.

- Si on utilise un axe Oz orienté vers le haut, la conservation de (10) peut être formulée de la façon équivalente suivante: pour A et B deux points sur une même ligne de courant, on a toujours l'égalité
$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B + p_B\,. \tag{11}$$

2 Exercices à préparer

Attention! Ces exercices **ne** seront **pas** corrigés durant la séance, mais les solutions seront disponibles sur l'UV.

1. Que vaut la pression correspondant à un fluide exerçant une force de $150N$ sur une surface d'aire $10cm^2$? Exprimer votre résultat dans les unités du SI.

2. A quelle profondeur dans l'océan devons-nous plonger afin d'atteindre une pression de $224\,atm$? On prend ρ_0 pour la masse volumique de l'eau de mer.

3. Si le débit d'un robinet est de 2 L/min et que sa section est d'aire $3cm^2$, que vaut la vitesse de sortie de l'eau? Exprimer la réponse en m/s.

4. Le long d'une ligne de courant horizontale par rapport au champ de pesanteur, une augmentation de la vitesse s'accompagne-t-elle d'une augmentation ou une diminution de la pression?

3 Exercices

Les exercices marqués d'une étoile sont à résoudre en priorité.

⋆ 1. On considère une bassine remplie d'eau dans laquelle deux blocs sont liés par une corde. Le bloc 1 a un volume $V_1 = 300cm^3$ et une masse volumique $\rho_1 = 90kg/m^3$ et le bloc 2 a un volume $V_2 = 400cm^3$ et une masse volumique $\rho_2 = 700kg/m^3$. Les deux blocs, moins denses que l'eau, ont tendance à flotter, mais le bloc 2 est attaché au fond de la bassine par une chaîne. Voir figure 1 pour un récapitulatif.

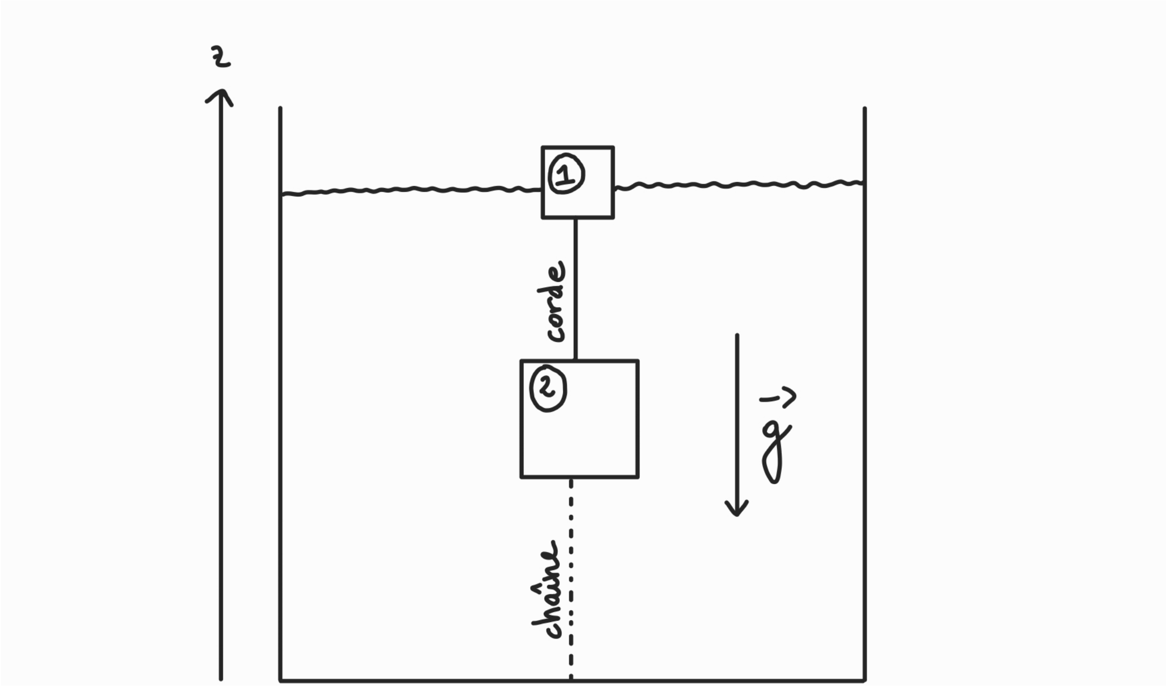

Figure 1: Deux blocs sont attachés ensemble par une corde tendue dans une bassine. Le bloc du dessous est attaché par une chaîne au fond de la bassine. Nous prenons l'axe des z comme indiqué sur la figure.

On suppose pour l'instant que 15% du volume du bloc 1 est immergé dans l'eau, que le bloc 2 est totalement immérgé que la corde et la chaîne sont tendues et que le système est à l'équilibre. On néglige de plus la masse de la corde ainsi que la masse de la chaîne.

(a) Calculer les masses M_1 et M_2 des blocs 1 et 2.

(b) Quelle est la tension T_{corde} dans la corde?

(c) Quelle est la tension T_{ch} dans la chaine?

On augmente maintenant progressivement le niveau de l'eau dans la bassine. On suppose de plus que la chaîne se brise si sa tension excède $500N$ tandis que la tension de la corde ne peut dépasser $150N$ sans se rompre.

(d) Peut-on complètement immerger le bloc 1 sans briser la chaine et sans rompre la corde? Si oui, démontrer pourquoi.
Si non, déterminer laquelle des deux cède en premier, et à quelle valeur du volume immergé du bloc 1 la rupture a lieu.

2. On considère une bassine dont l'aire du fond est A et les bords, verticaux, ont une hauteur H. La bassine est remplie d'eau jusqu'à une hauteur h, h étant plus petit que H, et on note p_{atm} la pression atmosphérique. Voir figure 2.

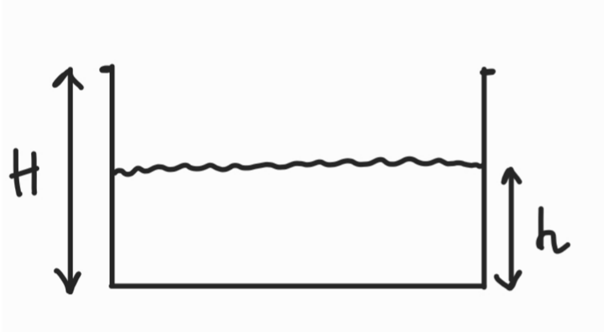

Figure 2: Une bassine partiellement remplie d'eau.

(a) Quelle est la pression p au fond de la bassine?

(b) Quelle est la force de pression f_{p} exercée par l'eau sur le fond de la bassine en fonction A et h?

On ajoute maintenant un petit bloc de masse M et de volume V dans la bassine, voir figure 3. On note Δh l'augmentation de la hauteur du niveau de l'eau dans la bassine. Le niveau d'eau est donc maintenant à $h + \Delta h$.

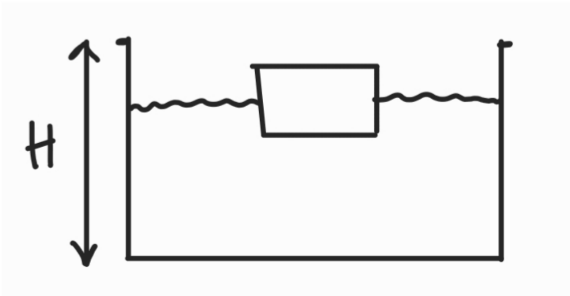

Figure 3: On ajoute un bloc dans la bassine.

(c) A quelle condition sur M le bloc flotte-t-il?

(d) Quelle est la force de pression f'_{p} exercée par l'eau sur le fond de la bassine? Exprimez votre réponse en fonction la pression p que l'on avait avant d'ajouter le bloc.

(e) En calculant la pression p' au fond de la bassine, déterminer la valeur de l'augmentation de la hauteur d'eau Δh en fonction de M, A et la masse volumique de l'eau.

⋆ 3. On considère un vase en forme de "U" dans lequel on place deux liquides incompressibles, chacun dans une colonne du vase. Les liquides sont de masse volumique ρ_1 et ρ_2 différentes et sont non-miscibles, c'est-à-dire qu'ils ne se mélangent pas. Les deux colonnes du vase sont ouvertes à l'air libre, et on note h_1 et h_2 les hauteurs des liquides. On suppose que $\rho_2 > \rho_1$. Voir figure 4 pour un récapitulatif.

Le point A se trouve à la surface du liquide de gauche, le point B se trouve dans le liquide de gauche au point le plus bas de la colonne de gauche et le point C se trouve dans le liquide de droite au point le plus bas de la colonne de droite. Le fond du vase étant horizontal, les points B et C sont à la même hauteur.

(a) Que vaut la pression p_A au point A?

(b) Que vaut la pression p_B au point B? Exprimez votre réponse en terme de ρ_1 et h_1.

(c) Que vaut la pression p_C au point C? Exprimez votre réponse en terme de ρ_2 et h_2.

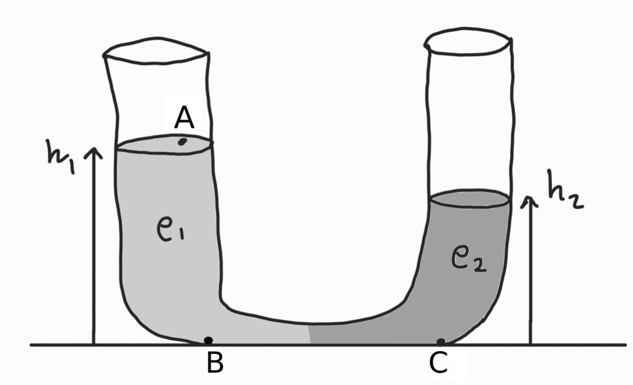

Figure 4: Un vase rempli avec deux liquides de masses volumiques différentes.

(d) En utilisant la loi de Pascal pour les points appropriés, montrer que l'on peut calculer le rapport des masses volumiques ρ_1/ρ_2 à l'aide de h_1 et h_2.

(e) Application numérique: calculer ρ_2 en supposant que $\rho_1 = 1000kg/m^3$, $h_1 = 12cm$ et $h_2 = 6cm$.

⋆ 4. On considère dans cette question un modèle très simplifié de circulation sanguine représenté sur la figure 5. Le seul et unique rôle du coeur dans ce modèle est de donner une vitesse $V = 5cm/s$ au sang. Le sang sort du coeur par le point A et monte ensuite en s'écoulant dans l'artère de rayon $R = 1.5cm$, sur la gauche dans la figure 5, jusqu'à arriver à une bifurcation. Les deux vaisseaux de cette bifurcation ont le même rayon $r = 0.75cm$ mais ne sont pas à la même hauteur par rapport au coeur: le point B, situé dans le vaisseau inférieur, est à une hauteur $h_B = 20cm$, et le point C, situé dans le vaisseau supérieur, est à une hauteur $h_C = 30cm$. Le sang retourne ensuite au coeur par la veine, sur la droite dans la figure 5.

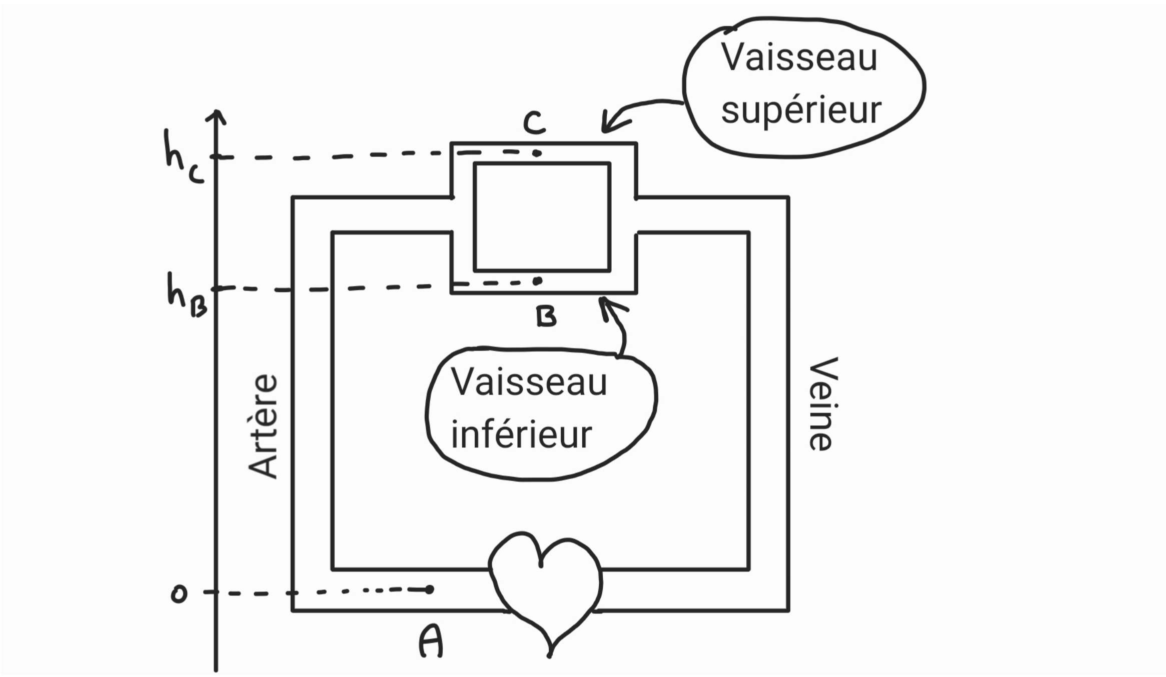

Figure 5: Modèle très simplifié de circulation sanguine. Le sens de circulation est horlogique. Les points A, B et C ne sont pas à la même hauteur.

On admettra dans cette question que la vitesse du sang en B et en C sont les mêmes: $v_B = v_C$. On note cette vitesse v dans la suite. On note de plus p_A la pression en A et de même pour p_B et p_C.

On suppose dans cette question que le sang est un fluide incompressible, non-visqueux et que son écoulement est laminaire et satisfait à la conservation du débit. On prend de plus la masse volumique du sang $\rho_{\text{sang}} = 1000 kg/m^3$.

(a) En utilisant la conservation du débit, déterminer la valeur de v.

(b) Que vaut la différence de pression $p_A - p_B$?

(c) Que vaut la différence de pression $p_B - p_C$?

A partir de maintenant, on suppose que les besoins nutritifs des tissus au voisinage du vaisseau supérieur augmentent. L'organisme se débrouille alors pour dilater le vaisseau concerné, de sorte que le rayon au point C augmente jusqu'à une valeur de $r_C = \alpha r$, le facteur de dilatation étant fixé à $\alpha = 1.1$. Le rayon du vaisseau inférieur ne change pas et reste donc à la valeur de r. Nous supposons toujours que les vitesses d'écoulement dans les deux vaisseaux sont égales.

(d) A quelle vitesse V' le coeur doit-il propulser le sang afin de maintenir la vitesse v_C égale à v?

5. On considère un fluide parfait et incompressible, de masse volumique ρ, dans une conduite verticale et ayant un rétrécissement tel que représenté sur la figure 6. On repère différents points de l'écoulement par A, B et C: les rayons en A et C sont égaux et notés R. Celui en B, où la conduite est plus étroite, est noté r, avec $r < R$. On suppose également que l'écoulement est non-turbulent et satisfait à la loi de conservation du débit. On note Q le débit dans la conduite et z_A, z_B, z_C les coordonnées des points A, B et C en utilisant l'axe des z comme sur la figure 6. On considère que l'écoulement a lieu dans le sens descendant.

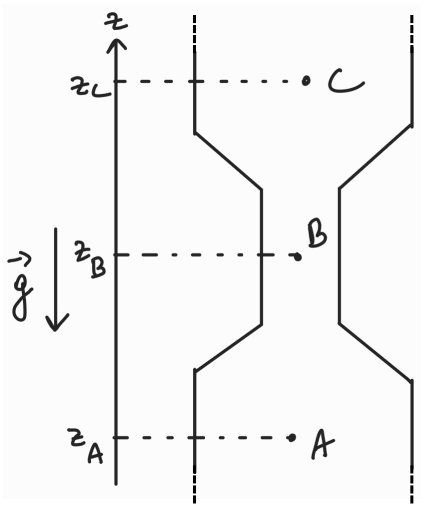

Figure 6: Un fluide s'écoule vers le bas dans une conduite de diamètre variable. On ne montre ici qu'une portion de la conduite, le système n'est pas ouvert à l'atmosphère.

Exprimez toutes vos réponses en fonction des paramètres du problème, à savoir r, R, z_A, z_B, z_C, Q et ρ.

(a) Que vaut la vitesse du fluide aux points A, B et C?

(b) Que vaut la différence de pression $p_B - p_C$?

(c) Que vaut la différence de pression $p_C - p_A$?

(d) Que doit valoir r pour que la pression en B et en C soit identique?

6. On considère un patient, allongé dans son lit, avec dans son bras une perfusion par laquelle on injecte un liquide incompressible et non-visqueux de masse volumique $\rho = 950kg/m^3$ grâce à une seringue horizontale. Le piston de la seringue se déplace à une vitesse constante de norme $v = 0.2cm/s$, et l'écoulement ainsi produit est supposé non-turbulent et le débit associé est conservé. On suppose de plus que la seringue se trouve à une hauteur $h = 90cm$ du sol, alors que l'aiguille se trouve à une hauteur $H = 120cm$.

   La seringue est modélisée par un cylindre de rayon $R = 2cm$ et de longueur $L = 12cm$. Elle est raccordée au tuyau flexible, qui a un rayon de $r = 0.5cm$. De plus, juste avant l'aiguille, une colonne d'une hauteur totale de $60cm$ est insérée sur le tuyau. Cette colonne est ouverte à l'air libre et sert à mesurer la pression à cet endroit de l'écoulement. La pression de l'air est de $p_{\text{atm}} = 1atm$.

   Voir figure 7 pour un récapitulatif.

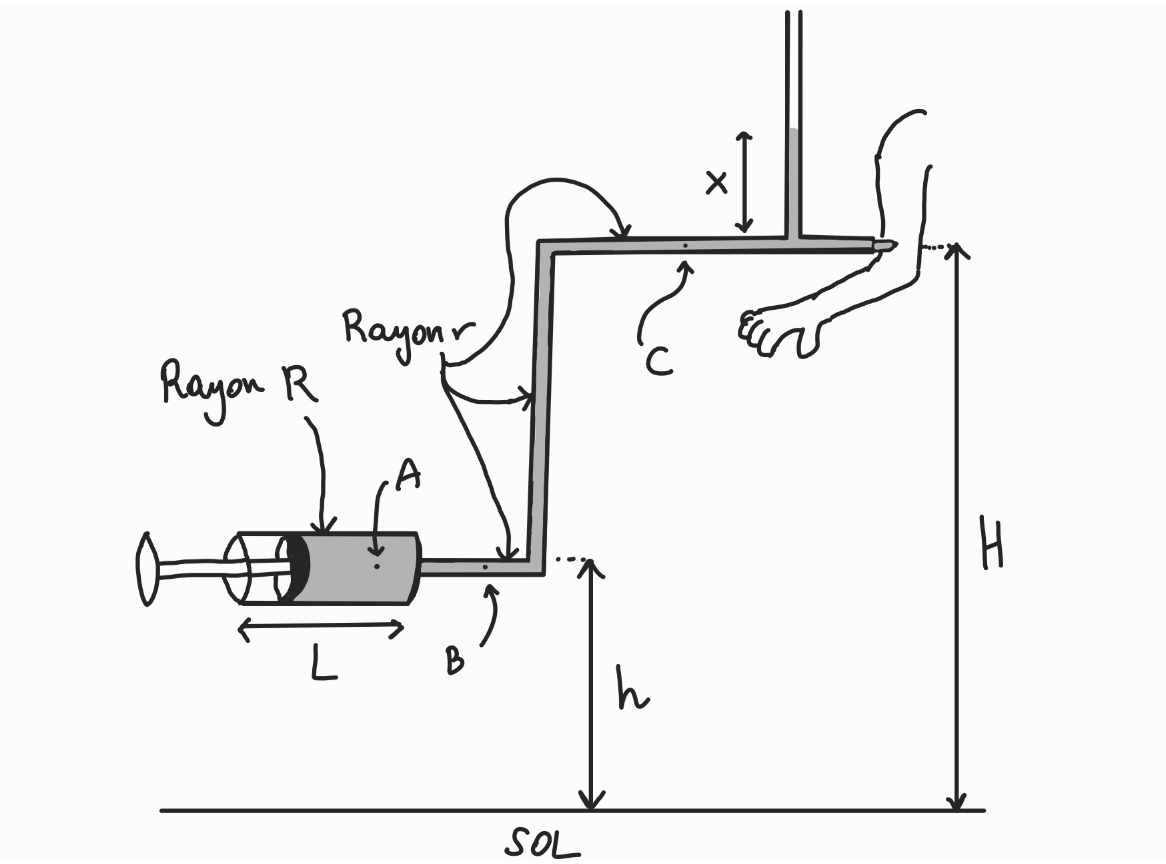

Figure 7: Une seringue pousse du liquide dans le bras d'un patient. Le point A est dans la seringue. Le point B est à la même hauteur que la seringue mais est dans le tuyau flexible. Le point C est également dans le tuyau flexible mais à la même hauteur que l'aiguille. On note p_A la pression du fluide en A et idem pour p_B et p_C.

   (a) Que vaut le débit Q dans cet écoulement?
   (b) En supposant que la seringue est initialement totalement remplie, après combien de temps la seringue sera-t-elle complètement vidée?
   (c) Que vaut la norme de la vitesse v_A du fluide au point A?
   (d) Que vaut la norme de la vitesse v_B du fluide au point B?
   (e) Que vaut la norme de la vitesse v_C du fluide au point C?
   (f) Quelle est la différence de pression $p_A - p_B$?
   (g) Quelle est la différence de pression $p_B - p_C$?

(h) On mesure que le fluide dans la colonne est à une hauteur $x = 15cm$. Que vaut la différence de pression $p_C - p_{\text{atm}}$?