

BA1 en Sciences Biomédicales et Médecine Vétérinaire

Série d'exercice n° 3

COORDONÉES CARTÉSIENNES ET VECTEURS

1 Rappels

- Nous nous intéressons à un point P pouvant se déplacer sur un *plan* (“monde à deux dimensions”).
- On utilise alors un point de référence O et un *système d'axes* pour repérer P grâce à ses coordonnées.
- **Notation:** pour un point de référence O et deux axes x et y , on note Oxy le système d'axe correspondant.
- Les axes sont *perpendiculaires* l'un par rapport à l'autre, et les coordonnées du point P sont définies par *projection orthogonale* (voir figure 1).

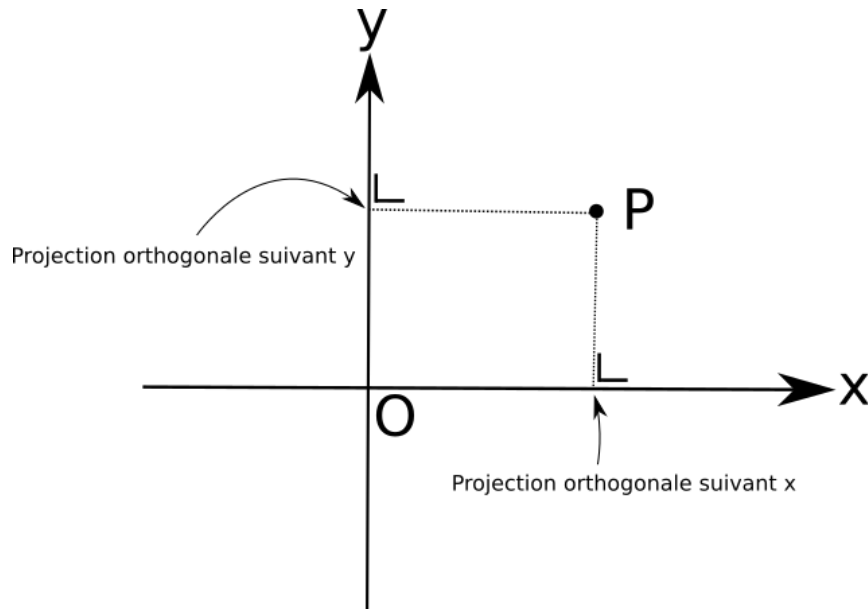


Figure 1: Les coordonnées sont définies par projection orthogonale selon les axes.

- **Définition:** le *vecteur position* est noté \overrightarrow{OP} et correspond à la *flèche partant du point O et se terminant au point P*. Voir figure 2.

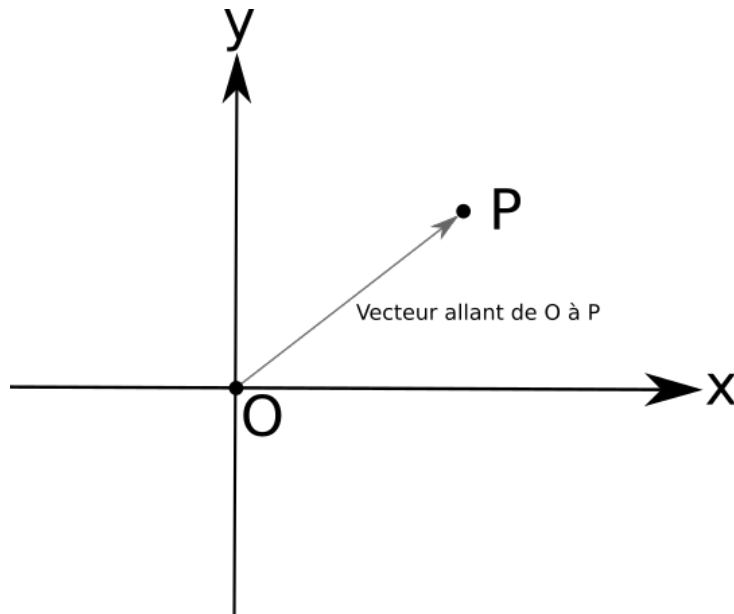


Figure 2: Le vecteur position est la flèche partant du point O et se terminant sur le point P .

- **Définition:** De manière générale, un *vecteur* est un concept mathématique correspondant à une *direction* et une *intensité*. Il peut être caractérisé par ses *composantes* suivant un système d'axes donné. On le note **toujours** avec une petite flèche par dessus, comme par exemple pour \overrightarrow{OP} ou \vec{F} .

- Le calcul des composantes d'un vecteur est appelé la *décomposition* d'un vecteur. Elle se fait toujours *par rapport à un système d'axes*.

- **Notation:** si un vecteur \vec{A} a des composantes A_x et A_y dans le système d'axe Oxy , alors on écrit

$$\vec{A} = (A_x, A_y). \quad (1)$$

D'autres notations existent (en colonne par exemple) et sont également acceptées (nous ne faisons pas de différence dans ce cours entre ces notations).

- Nous avons également défini géométriquement les opérations de somme et de multiplication par un nombre quelconque. Ces opérations sont résumées ici en supposant que les vecteurs ont été décomposés:

1. **Somme:** si \vec{A} et \vec{B} sont deux vecteurs, alors le vecteur $\vec{A} + \vec{B}$ a les composantes $(A_x + B_x, A_y + B_y)$.
2. **Multiplication par un nombre:** si \vec{A} est un vecteur et a est un nombre réel quelconque, alors le vecteur $a\vec{A}$ a les composantes (aA_x, aA_y) .
3. **Norme:** si \vec{A} est un vecteur de composantes (A_x, A_y) , alors on définit la *norme* de \vec{A} par le nombre suivant:

$$\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

On note souvent $\|\vec{A}\|$ ou même parfois simplement juste A pour la norme de \vec{A} .

- **Attention:** un vecteur ne peut *jamais* être "égal" à un nombre réel. On ne peut donc *jamais* écrire quelque chose comme " $\vec{A} = 5$ ". *Cela n'a aucun sens car un vecteur contient plus d'information qu'un nombre réel.*

- Si le point P se déplace au cours du temps, le vecteur \overrightarrow{OP} dépend du temps. Les composantes sont donc des fonctions du temps: $x(t)$ et $y(t)$.

- **Rappel de trigonométrie:** Pour un triangle rectangle comme sur la figure 3, on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 + b^2 & a &= h \cos \alpha \\ \tan \alpha &= b/a & b &= h \sin \alpha \end{aligned}$$

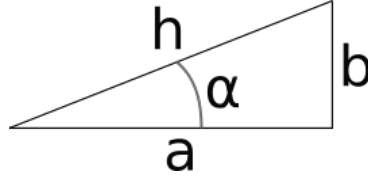


Figure 3: Les relations entre les paramètres a , b , h et α dans un triangle rectangle seront utiles pour décomposer des vecteurs.

2 Exercices à préparer

Attention! Ces exercices **ne** seront **pas** corrigés durant la séance, mais les solutions seront disponibles sur l'UV.

1. Que valent les coordonnées x et y du point P de la figure 4?

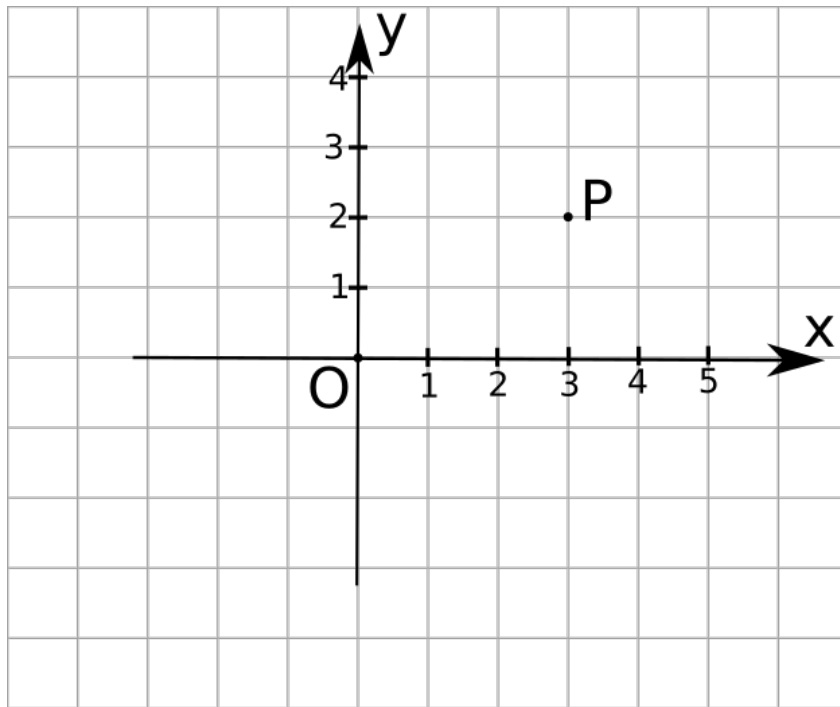


Figure 4: On demande les coordonnées x et y du point P .

2. Que vaut la somme des vecteurs $(1, 0)$ et $(-1, -1)$?

3 Exercices

Les exercices marqués d'une étoile sont à résoudre en priorité.

- ★ 1. On considère le système d'axes Oxy et les 4 points P_1, P_2, P_3 et P_4 sur la figure 5.
- Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ et $\overrightarrow{OP_4}$.
 - Que vaut le vecteur $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_3}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la base de la flèche au point O .
 - Que vaut le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_2}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O .

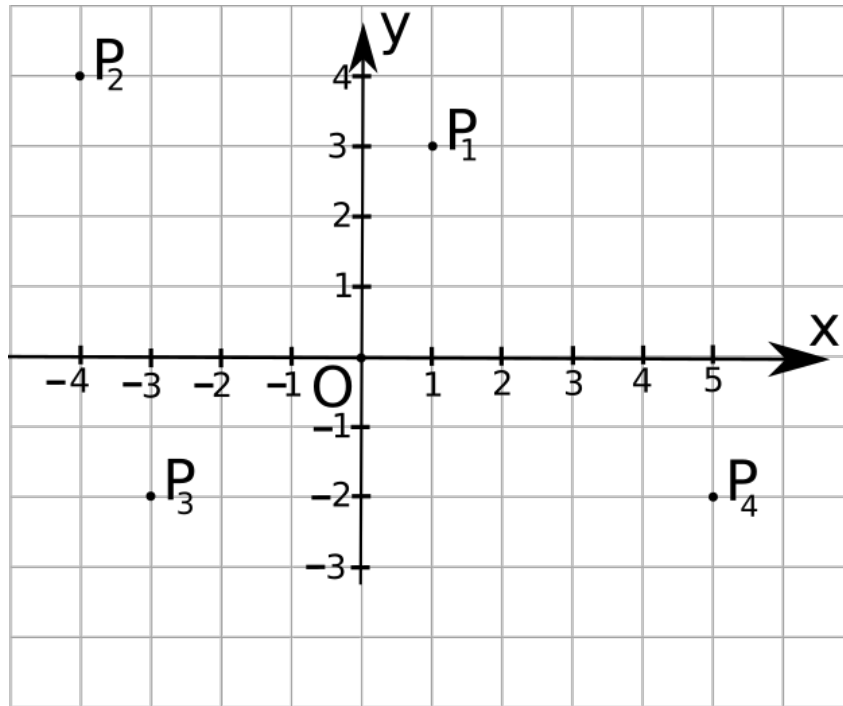


Figure 5: On utilise les coordonnées par rapport au système d'axes Oxy .

- Soient \vec{A} et \vec{B} deux vecteurs comme sur la figure 6.
 - Que valent les composantes de ces vecteurs?
 - Que valent les normes A, B et C ?
 - Que vaut la somme $\vec{A} + \vec{C}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O .
 - Que vaut la différence $\vec{B} - \vec{A}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O .
 - Calculer la norme des vecteurs $\vec{A} + \vec{B}$ et $\vec{A} - \vec{B}$.
 - Que vaut l'angle que fait \vec{C} avec l'horizontale et avec la verticale? On rapporte ici les angles à leurs valeurs dans le premier quadrant, c'est-à-dire compris entre 0 et $\pi/2rad$.
- ★ 3. On considère un point dont le vecteur de vitesse \vec{V} est représenté sur la figure 7. On note α l'angle qu'il fait avec l'horizontale et V sa norme. Que valent les composantes V_x et V_y en fonction de α et V ?
- Même question que ci-dessus, mais cette fois le vecteur est donné sur la figure 8 et α est l'angle pris par rapport à la verticale.

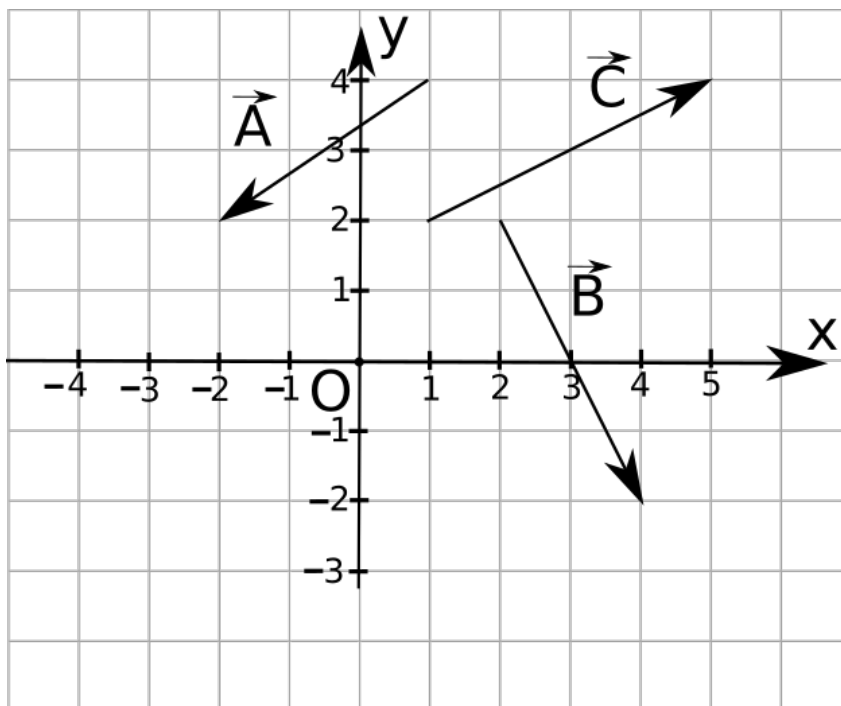


Figure 6: Trois vecteurs à différences angles et différents points de localisation.

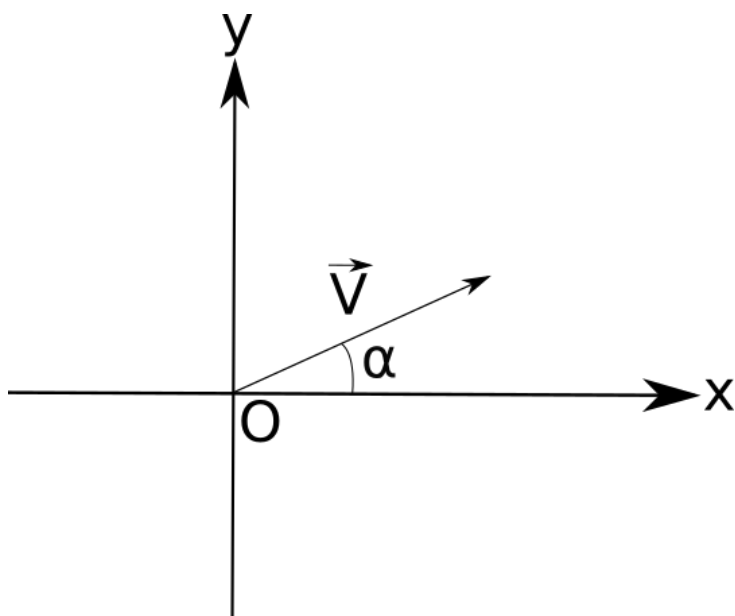


Figure 7: Le vecteur \vec{V} fait un angle α avec l'horizontale.

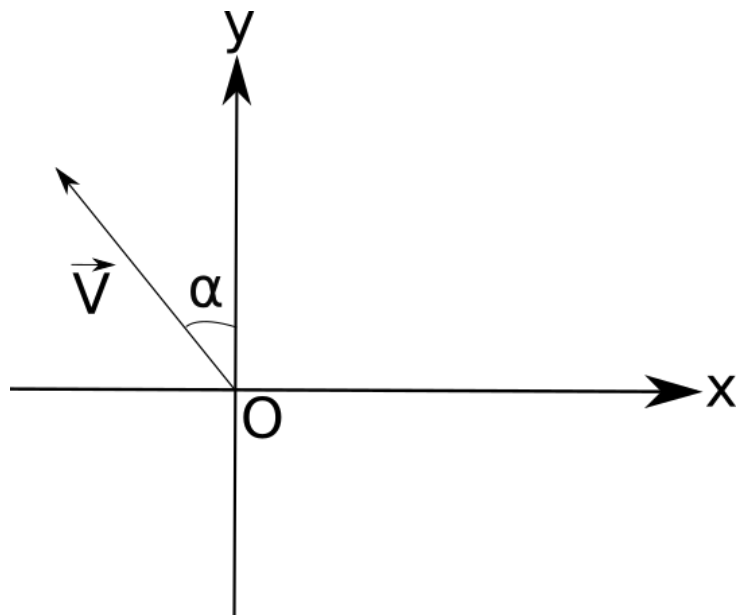


Figure 8: Le vecteur \vec{V} fait un angle α avec la verticale.