Physique appliquée aux sciences de la Vie - Module I *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Sciences Biomédicales et Médecine Vétérinaire

Série d'exercice n° 4

Cinématique en deux et trois dimensions

1 Rappels

- On s'intéresse à un point $P(t)$ se mouvant dans un espace à deux ou trois dimensions. Dans le cas le plus général à trois dimensions, on utilie un point de référence O et un système d'axes cartésiens $Oxyz$.
- **Notation**: Le vecteur position est noté $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t)$ et ses composantes $(x(t), y(t), z(t))$.
- **Définition**: Le vecteur vitesse est $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.
- **Définition**: Le vecteur accélération est $\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$.
- Ces définitions s'adaptent trivialement si le point se meut dans un espace deux dimensions.
- Nous avons discuté des mouvements suivant au cours:

  1. Le ***Mouvement Circulaire*** (MC): le point P est contraint à se déplacer sur un cercle de rayon R, où R est un nombre positif. Si le mouvement à lieu dans le plan Oxy, et le cercle est centré en O, alors on peut toujours écrire

     $$x(t) = R\cos\theta(t) \qquad y(t) = R\sin\theta(t)\,, \tag{1}$$

     où $\theta(t)$ est une certaine fonction du temps.

     Cas particulier: le ***Mouvement Circulaire Uniforme*** (MCU) est par définition un mouvement circulaire avec la contrainte suivante sur $\theta(t)$:

     $$\theta(t) = \theta_0 + \omega t\,, \tag{2}$$

     où θ_0 et ω sont des constantes. On appelle θ_0 la *phase* et ω la *vitesse angulaire*. Si $\omega > 0$ (resp. $\omega < 0$), le point tourne dans le sens *anti-horlogique* (resp. *horlogique*). La *période* T est donnée par

     $$T = \frac{2\pi\ rad}{|\omega|}\cdot \tag{3}$$

  2. Le ***Mouvement Parabolique*** (aussi appelé le ***Mouvement Balistique***): il correspond aux trajectoires telles que l'accélération est constante, verticale et vers le bas; traditionnellement nous mettons l'axe des z à la verticale et vers le haut; le mouvement est alors:

     $$x(t) = x_0 + v_{0x}t\,, \qquad z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\,, \tag{4}$$

où x_0, z_0, v_{0x}, v_{0z} et g sont des constantes. La valeur de g est positive et sur Terre elle vaut approximativement

$$g = 10 m/s^2 . \tag{5}$$

Les autres constantes sont fixées par les conditions initiales du problème.

- **Formules utiles:**

1. On considère l'équation suivante pour l'inconnue x:

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \tag{6}$$

où a, b et c sont des constantes. Alors on définit le *discriminant* Δ, par la formule

$$\Delta = b^2 - 4ac\,. \tag{7}$$

Si $\Delta > 0$, alors l'équation (6) possède *deux* solutions que l'on note x_+ et x_- et qui sont données part

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\,. \tag{8}$$

Si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une solution, à savoir $-b/2a$.

Si $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de solution réelle à l'équation (6).

2. Les fonctions sinus et cosinus sont telles que

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1\,, \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)\,. \tag{9}$$

et ce pour n'importe quelle valeur de l'angle α.

3. Les dérivées du cosinus et du sinus sont:

$$\text{Si } f(x) = \sin(ax), \text{ alors } f'(x) = a\cos(ax)\,, \tag{10}$$

$$\text{Si } f(x) = \cos(ax), \text{ alors } f'(x) = -a\sin(ax)\,. \tag{11}$$

2 Exercices à préparer

Attention! Ces exercices **ne** seront **pas** corrigés durant la séance, mais les solutions seront disponibles sur l'UV.

1. Que vaut la norme du vecteur position dans le cas du Mouvement Circulaire défini en (1)?
2. Si le vecteur position vaut $r(t) = (vt, 0, 0)$ où v est une constante, que valent les vecteurs vitesse et accélération?

3 Exercices

Les exercices marqués d'une étoile sont à résoudre en priorité.

$\star$ 1. **(Mouvement Circulaire Uniforme)** On considère un point P décrivant un mouvement circulaire uniforme dans le plan Oxy et centré en O. Le mouvement est tel qu'en $t = 0s$, le point se trouve en P_0 qui est de coordonnées $(5m, 0)$. Le sens de rotation est anti-horlogique, et il faut $10s$ pour faire exactement un tour complet.

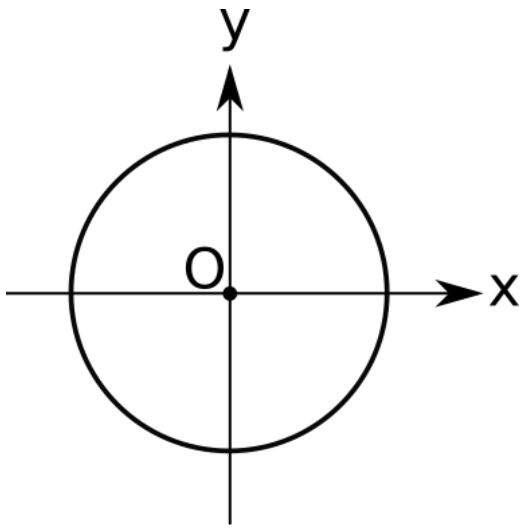

Figure 1: Un cercle dans le système d'axes Oxy.

a. Que vaut le rayon R de ce mouvement circulaire?
b. Représenter sur la figure 1 le point P_0.
c. Que vaut la phase θ_0? (On suppose qu'elle est comprise entre 0 et 2π.)
d. Que vaut la vitesse angulaire ω?
e. Quelles sont les coordonnées du point P lorsque $t = 4s$? Représenter approximativement ce point sur la figure 1.
f. A quel instant t_1 le point P croise l'axe des y pour la première fois?
g. A quel instant t_2 le point P croise l'axe des y pour la deuxième fois?
h. Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ pour n'importe quelle valeur de t.
i. Représenter sur la figure 1 le vecteur vitesse au temps $t = 0s$, t_1 et t_2.
j. Calculer le vecteur accélération $\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t))$ pour n'importe quelle valeur de t.
k. Représenter sur la figure 1 le vecteur accélération au temps $t = 0s$, t_1 et t_2.

$\star$ 2. **(Mouvement Parabolique)** On considère un point P se mouvant dans le plan Oxz et suivant un mouvement parabolique. Au temps $t = 0s$, le point se trouve sur le point de référence O (placé au niveau du sol), sa vitesse fait un angle $\alpha = 13°$ avec l'horizontale et la norme de sa vitesse vaut $v_0 = 5m/s$. Voir figure 2 pour un récapitulatif.

a. Que valent les composantes v_{0x} et v_{0z} de la vitesse initiale?
b. On note $t_\star$ l'instant où le point P retombe par terre. Que vaut ce temps?
c. Calculer la coordonnée x du point d'impact (on la note $x_\star$).
d. Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_z(t))$ pour n'importe quelle valeur de t.
e. Que vaut $\vec{v}(t_\star)$? Representer ce vecteur sur la figure 2.

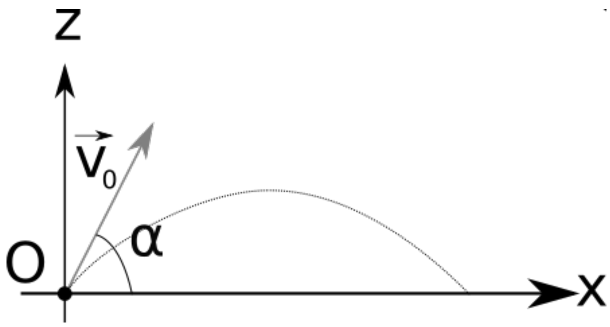

Figure 2: Une trajectoire parabolique dans le plan Oxz.

f. Quel angle fait $\vec{v}(t_\star)$ avec l'axe des x?

g. A quel instant $t_{\max}$ le point P atteint-il sa hauteur maximale? (Rappel: il suffit de résoudre $z'(t) = 0$, voyez-vous pourquoi?)

h. Que vaut la vitesse en $t_{\max}$? Representer ce vecteur sur la figure 2.

i. Calculer le vecteur accélération $\vec{a}(t) = (a_x(t), a_z(t))$ pour n'importe quelle valeur de t.

j. Que vaut $\vec{a}(t)$ pour $t = 0s, t = t_\star$ et $t = t_{\max}$? Representer ces vecteurs sur la figure 2.

3. **(Mouvement Parabolique)** On reprend la configuration de la figure 2, mais cette fois les paramètres v_0 et α ne sont pas connus. On impose cependant que la hauteur maximale de la trajectoire soit $h = 15m$ et que l'impact avec le sol ait lieu en $x_\star = 9m$. Que doivent valoir les paramètres v_0 et α pour que cela soit possible? (Aide: inspirez-vous des étapes de la question précédente.)

4. **(Mouvement Circulaire Uniforme et Mouvement Parabolique)** On considère le problème à trois dimensions suivant. Un point P se déplace dans le plan xy et effectue un MCU centré sur O. Nous pouvons donc prendre, pour ses coordonnées (x_P, y_P, z_P), les formules suivantes:

$$x_P(t) = R\cos(\omega t + \theta_0)\,, \qquad y_P(t) = R\sin(\omega t + \theta_0)\,, \qquad z_P(t) = 0\,, \tag{12}$$

où R et ω sont des nombres positifs et θ_0 est compris entre 0 et $2\pi rad$. Au temps $t = 0s$, le point P se trouve en $(0, -9m, 0)$. Un autre point, Q, suit un mouvement parabolique dans le plan yz, et nous pouvons donc supposer que ses coordonnées (x_Q, y_Q, z_Q) prennent la forme

$$x_Q(t) = 0\,, \qquad y_Q(t) = y_0 + v_{0y}t\,, \qquad z_Q(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\,, \tag{13}$$

où y_0, v_{0y}, z_0 et v_{0z} sont des nombres réels. Au temps $t = 0s$, le point Q est en O et a une vitesse $\vec{v}_0$ de norme $v_0 = 15m/s$. Voir figure 3 pour un récapitulatif.

a. Déterminer les valeurs de R, θ_0, y_0, z_0.

b. Déterminer l'angle α que doit faire la vitesse initiale de Q avec l'axe des y afin que Q atteigne $(0, 9m, 0)$.

c. Que doit valoir ω pour que le point P et Q s'interceptent lors du premier tour de P?

d. Que doit valoir ω pour que le point P et Q s'interceptent après que le point P ait complété 5 tours?

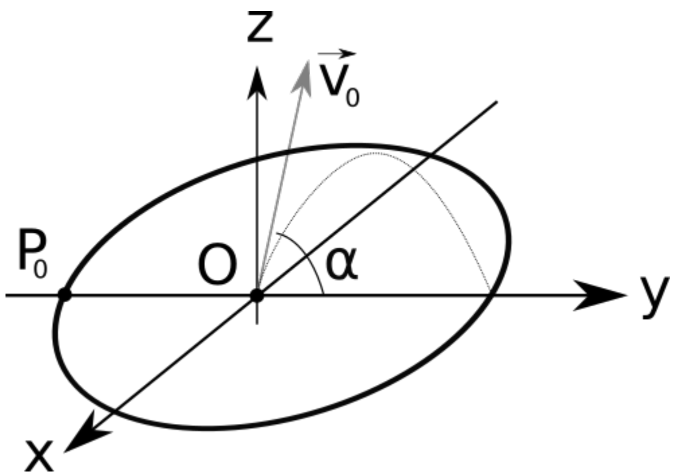

Figure 3: La trajectoire circulaire a lieu dans le plan Oxy et le mouvement parabolique dans le plan Oyz.