Université Libre de Bruxelles

Année Académique 2023-2024 — *PHYS-G1103*

Physique appliquée aux sciences de la Vie - Module I — *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Sciences Biomédicales et Médecine Vétérinaire

Série d'exercice n° 4

Cinématique en deux et trois dimensions

Solutions finales des exercices à préparer et des exercices non-étoilés

1 Rappels

- On s'intéresse à un point $P(t)$ se mouvant dans un espace à deux ou trois dimensions. Dans le cas le plus général à trois dimensions, on utilie un point de référence O et un système d'axes cartésiens $Oxyz$.
- **Notation**: Le vecteur position est noté $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t)$ et ses composantes $(x(t), y(t), z(t))$.
- **Définition**: Le vecteur vitesse est $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.
- **Définition**: Le vecteur accélération est $\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$.
- Ces définitions s'adaptent trivialement si le point se meut dans un espace deux dimensions.
- Nous avons discuté des mouvements suivant au cours:

  1. Le ***Mouvement Circulaire*** (MC): le point P est contraint à se déplacer sur un cercle de rayon R, où R est un nombre positif. Si le mouvement à lieu dans le plan Oxy, et le cercle est centré en O, alors on peut toujours écrire

  $$x(t) = R\cos\theta(t) \qquad y(t) = R\sin\theta(t)\,, \tag{1}$$

  où $\theta(t)$ est une certaine fonction du temps.

  Cas particulier: le ***Mouvement Circulaire Uniforme*** (MCU) est par définition un mouvement circulaire avec la contrainte suivante sur $\theta(t)$:

  $$\theta(t) = \theta_0 + \omega t\,, \tag{2}$$

  où θ_0 et ω sont des constantes. On appelle θ_0 la *phase* et ω la *vitesse angulaire*. Si $\omega > 0$ (resp. $\omega < 0$), le point tourne dans le sens *anti-horlogique* (resp. *horlogique*). La *période* T est donnée par

  $$T = \frac{2\pi\ rad}{|\omega|}\cdot \tag{3}$$

2. Le ***Mouvement Parabolique*** (aussi appelé le ***Mouvement Balistique***): il correspond aux trajectoires telles que l'accélération est constante, verticale et vers le bas; traditionnellement nous mettons l'axe des z à la verticale et vers le haut; le mouvement est alors:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \,, \qquad z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \,, \tag{4}$$

où x_0, z_0, v_{0x}, v_{0z} et g sont des constantes. La valeur de g est positive et sur Terre elle vaut approximativement

$$g = 10m/s^2. \tag{5}$$

Les autres constantes sont fixées par les conditions initiales du problème.

- **Formules utiles:**

1. On considère l'équation suivante pour l'inconnue x:

$$ax^2 + bx + c = 0 \,, \tag{6}$$

où a, b et c sont des constantes. Alors on définit le *discriminant* Δ, par la formule

$$\Delta = b^2 - 4ac \,. \tag{7}$$

Si $\Delta > 0$, alors l'équation (6) possède *deux* solutions que l'on note x_+ et x_- et qui sont données part

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \,. \tag{8}$$

Si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une solution, à savoir $-b/2a$.

Si $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de solution réelle à l'équation (6).

2. Les fonctions sinus et cosinus sont telles que

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \,, \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha) \,. \tag{9}$$

et ce pour n'importe quelle valeur de l'angle α.

3. Les dérivées du cosinus et du sinus sont:

$$\text{Si } f(x) = \sin(ax), \text{ alors } f'(x) = a\cos(ax) \,, \tag{10}$$

$$\text{Si } f(x) = \cos(ax), \text{ alors } f'(x) = -a\sin(ax) \,. \tag{11}$$

2 Exercices à préparer

Attention! Ces exercices **ne** seront **pas** corrigés durant la séance, mais les solutions seront disponibles sur l'UV.

1. Que vaut la norme du vecteur position dans le cas du Mouvement Circulaire défini en (1)? $r = R$

2. Si le vecteur position vaut $r(t) = (vt, 0, 0)$ où v est une constante, que valent les vecteurs vitesse et accélération? $\vec{v} = (v, 0, 0), \vec{a} = (0, 0, 0)$

3 Exercices

Les exercices marqués d'une étoile sont à résoudre en priorité.

⋆ 1. **(Mouvement Circulaire Uniforme)** On considère un point P décrivant un mouvement circulaire uniforme dans le plan Oxy et centré en O. Le mouvement est tel qu'en $t = 0s$, le point se trouve en P_0 qui est de coordonnées $(5m, 0)$. Le sens de rotation est anti-horlogique, et il faut $10s$ pour faire exactement un tour complet.

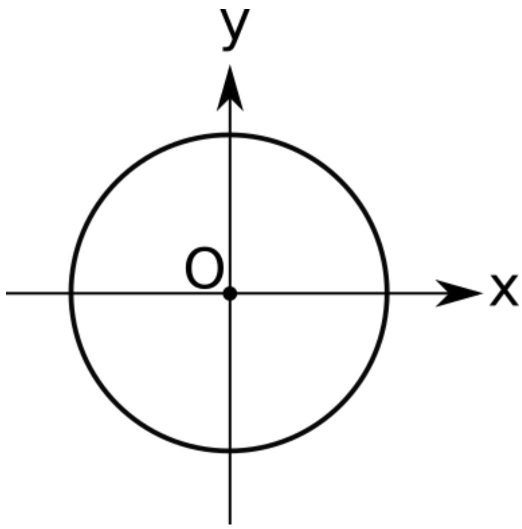

Figure 1: Un cercle dans le système d'axes Oxy.

a. Que vaut le rayon R de ce mouvement circulaire?
b. Représenter sur la figure 1 le point P_0.
c. Que vaut la phase θ_0? (On suppose qu'elle est comprise entre 0 et 2π.)
d. Que vaut la vitesse angulaire ω?
e. Quelles sont les coordonnées du point P lorsque $t = 4s$? Représenter approximativement ce point sur la figure 1.
f. A quel instant t_1 le point P croise l'axe des y pour la première fois?
g. A quel instant t_2 le point P croise l'axe des y pour la deuxième fois?
h. Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ pour n'importe quelle valeur de t.
i. Représenter sur la figure 1 le vecteur vitesse au temps $t = 0s$, t_1 et t_2.
j. Calculer le vecteur accélération $\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t))$ pour n'importe quelle valeur de t.
k. Représenter sur la figure 1 le vecteur accélération au temps $t = 0s$, t_1 et t_2.

⋆ 2. **(Mouvement Parabolique)** On considère un point P se mouvant dans le plan Oxz et suivant un mouvement parabolique. Au temps $t = 0s$, le point se trouve sur le point de référence O (placé au niveau du sol), sa vitesse fait un angle $\alpha = 13°$ avec l'horizontale et la norme de sa vitesse vaut $v_0 = 5m/s$. Voir figure 2 pour un récapitulatif.

a. Que valent les composantes v_{0x} et v_{0z} de la vitesse initiale?
b. On note $t_\star$ l'instant où le point P retombe par terre. Que vaut ce temps?
c. Calculer la coordonnée x du point d'impact (on la note $x_\star$).
d. Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_z(t))$ pour n'importe quelle valeur de t.
e. Que vaut $\vec{v}(t_\star)$? Representer ce vecteur sur la figure 2.

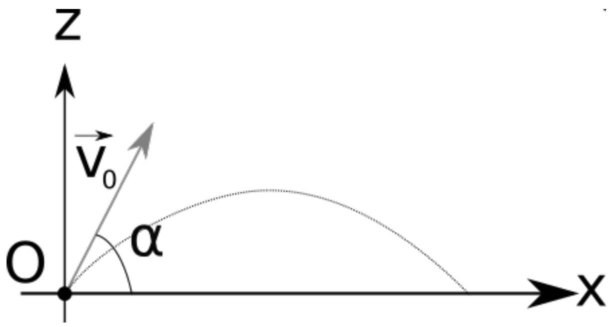

Figure 2: Une trajectoire parabolique dans le plan Oxz.

f. Quel angle fait $\vec{v}(t_\star)$ avec l'axe des x?

g. A quel instant $t_{\max}$ le point P atteint-il sa hauteur maximale? (Rappel: il suffit de résoudre $z'(t) = 0$, voyez-vous pourquoi?)

h. Que vaut la vitesse en $t_{\max}$? Representer ce vecteur sur la figure 2.

i. Calculer le vecteur accélération $\vec{a}(t) = (a_x(t), a_z(t))$ pour n'importe quelle valeur de t.

j. Que vaut $\vec{a}(t)$ pour $t = 0s, t = t_\star$ et $t = t_{\max}$? Representer ces vecteurs sur la figure 2.

3. **(Mouvement Parabolique)** On reprend la configuration de la figure 2, mais cette fois les paramètres v_0 et α ne sont pas connus. On impose cependant que la hauteur maximale de la trajectoire soit $h = 15m$ et que l'impact avec le sol ait lieu en $x_\star = 9m$. Que doivent valoir les paramètres v_0 et α pour que cela soit possible? (Aide: inspirez-vous des étapes de la question précédente.) $v_0 = 17.5m/s, \alpha = 81.5°$

4. **(Mouvement Circulaire Uniforme et Mouvement Parabolique)** On considère le problème à trois dimensions suivant. Un point P se déplace dans le plan xy et effectue un MCU centré sur O. Nous pouvons donc prendre, pour ses coordonnées (x_P, y_P, z_P), les formules suivantes:

$$x_P(t) = R\cos(\omega t + \theta_0)\,, \qquad y_P(t) = R\sin(\omega t + \theta_0)\,, \qquad z_P(t) = 0\,, \tag{12}$$

où R et ω sont des nombres positifs et θ_0 est compris entre 0 et $2\pi rad$. Au temps $t = 0s$, le point P se trouve en $(0, -9m, 0)$. Un autre point, Q, suit un mouvement parabolique dans le plan yz, et nous pouvons donc supposer que ses coordonnées (x_Q, y_Q, z_Q) prennent la forme

$$x_Q(t) = 0\,, \qquad y_Q(t) = y_0 + v_{0y}t\,, \qquad z_Q(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\,, \tag{13}$$

où y_0, v_{0y}, z_0 et v_{0z} sont des nombres réels. Au temps $t = 0s$, le point Q est en O et a une vitesse $\vec{v}_0$ de norme $v_0 = 15m/s$. Voir figure 3 pour un récapitulatif.

a. Déterminer les valeurs de R, θ_0, y_0, z_0. $R = 9m, y_0 = z_0 = 0, \theta_0 = -\frac{\pi}{2}rad$

b. Déterminer l'angle α que doit faire la vitesse initiale de Q avec l'axe des y afin que Q atteigne $(0, 9m, 0)$. $\alpha = 11,789°$

c. Que doit valoir ω pour que le point P et Q s'interceptent lors du premier tour de P? $\omega = 5,12rad/s$

d. Que doit valoir ω pour que le point P et Q s'interceptent après que le point P ait complété 5 tours? $\omega = 56,4rad/s$

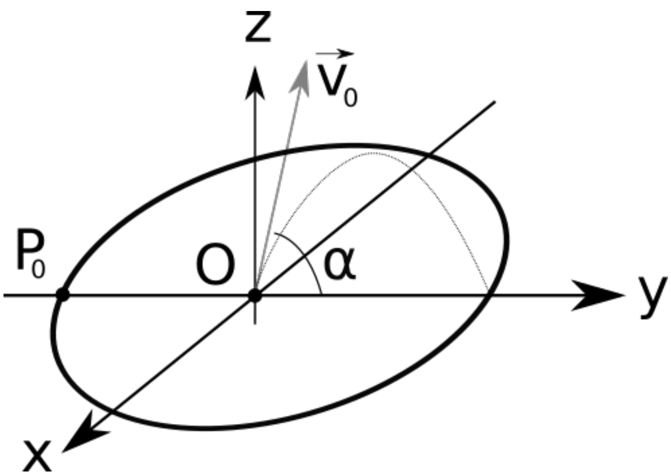

Figure 3: La trajectoire circulaire a lieu dans le plan Oxy et le mouvement parabolique dans le plan Oyz.