Université Libre de Bruxelles

Année Académique 2023-2024 — *PHYS-G1103*

Physique appliquée aux sciences de la Vie - Module I — *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Sciences Biomédicales et Médecine Vétérinaire

Série d'exercice n° 12

Hydrodynamique

Solutions finales des exercices à préparer et des exercices non-étoilés

1 Rappels

- Nous considérons maintenant les fluides *en mouvement*, typiquement un fluide s'écoulant dans une conduite cylindrique.
- **Définition:** si un volume de fluide ΔV s'écoule sur un intervalle de temps Δt, on définit le *débit* Q par
$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \,. \tag{1}$$
- Dans ce cours, on ne considère que des écoulements qui satisfont à la *conservation du débit*: par exemple, en l'absence de bifurcation dans le circuit, le débit Q doit être le même quel que soit l'endroit où il est calculé.
- En chaque point P du fluide et à chaque instant t on peut considérer la vitesse $\vec{v}(P,t)$ de l'élément de fluide en P. On appelle ceci le *champ de vitesse* du fluide.
- Pour une section d'aire S d'une conduite telle que
  - la section est perpendiculaire au champ de vitesse,
  - la vitesse v est constante sur la section,

  on a la relation
$$Q = vS \cdot \tag{2}$$
- Pour un instant t fixé, on définit les *lignes de courant* comme étant les courbes partout tangentes au champ de vitesse.
- Outre la conservation du débit, nous faisons également les hypothèses suivantes:
  - le fluide est incompressible (cf. hydrostatique),
  - le fluide est non-visqueux (absence de forces de friction),
  - l'écoulement est laminaire (écoulement non-turbulent),
  - l'écoulement est stationnaire (le champ de vitesse ne dépend pas de t).

- Dans ces conditions, on a alors le *théorème de Bernoulli*: Pour un point P du fluide, la quantité
$$\frac{1}{2}\rho v^2 - \rho\vec{g}\cdot\overrightarrow{OP} + p \tag{3}$$
où $\vec{g}$ est le vecteur d'accélération gravitationnelle, v et p sont respectivement la norme de la vitesse et la pression en P, et où O est un point de référence quelconque, est *conservée* le long des lignes de courant.

- Si on utilise un axe Oz orienté vers le haut, la conservation de (3) peut être formulée de la façon équivalente suivante: pour A et B deux points sur une même ligne de courant, on a toujours l'égalité
$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B + p_B\,. \tag{4}$$

2 Exercices à préparer

Attention! Ces exercices **ne** seront **pas** corrigés durant la séance, mais les solutions seront disponibles sur l'UV.

1. Si le débit d'un robinet est de 2 L/min et que sa section est d'aire $3cm^2$, que vaut la vitesse de sortie de l'eau? Exprimer la réponse en m/s. $v = 11m/s$

2. Le long d'une ligne de courant horizontale par rapport au champ de pesanteur, une augmentation de la vitesse s'accompagne-t-elle d'une augmentation ou une diminution de la pression? D'une diminution.

3 Exercices

Les exercices marqués d'une étoile sont à résoudre en priorité.

⋆ 1. On considère dans cette question un modèle très simplifié de circulation sanguine représenté sur la figure 1. Le seul et unique rôle du coeur dans ce modèle est de donner une vitesse $V = 5cm/s$ au sang. Le sang sort du coeur par le point A et monte ensuite en s'écoulant dans l'artère de rayon $R = 1.5cm$, sur la gauche dans la figure 1, jusqu'à arriver à une bifurcation. Les deux vaisseaux de cette bifurcation ont le même rayon $r = 0.75cm$ mais ne sont pas à la même hauteur par rapport au coeur: le point B, situé dans le vaisseau inférieur, est à une hauteur $h_B = 20cm$, et le point C, situé dans le vaisseau supérieur, est à une hauteur $h_C = 30cm$. Le sang retourne ensuite au coeur par la veine, sur la droite dans la figure 1.

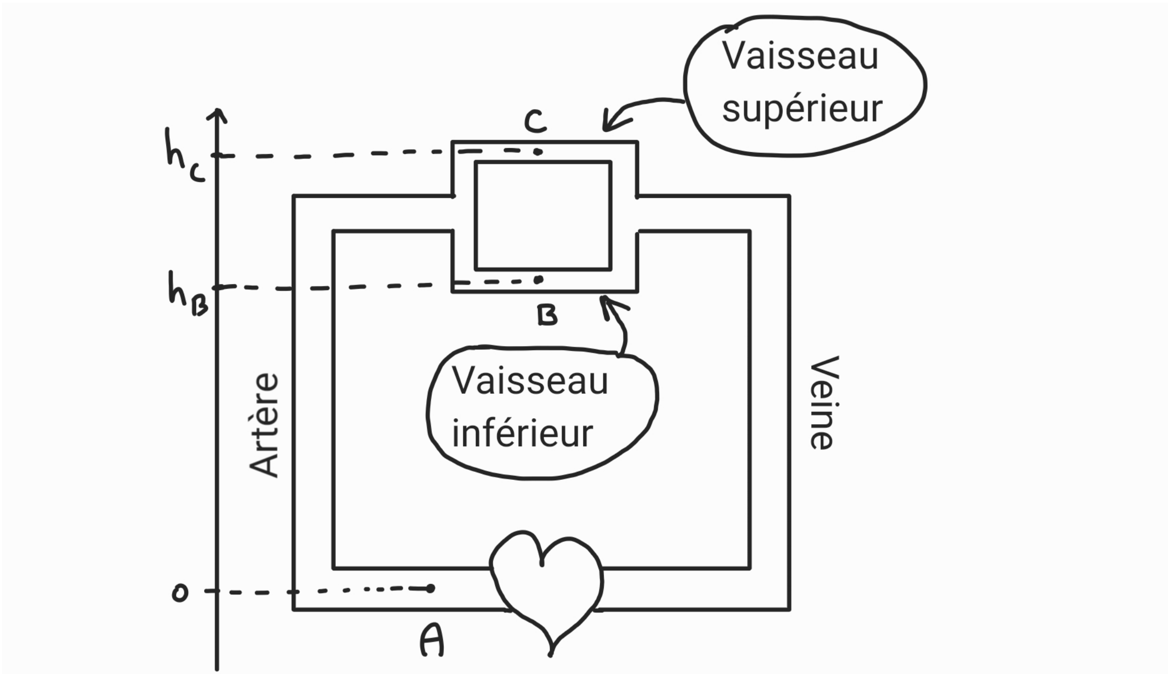

Figure 1: Modèle très simplifié de circulation sanguine. Le sens de circulation est horlogique. Les points A, B et C ne sont pas à la même hauteur.

On admettra dans cette question que la vitesse du sang en B et en C sont les mêmes: $v_B = v_C$. On note cette vitesse v dans la suite. On note de plus p_A la pression en A et de même pour p_B et p_C.

On suppose dans cette question que le sang est un fluide incompressible, non-visqueux et que son écoulement est laminaire et satisfait à la conservation du débit. On prend de plus la masse volumique du sang $\rho_{\text{sang}} = 1000kg/m^3$.

(a) En utilisant la conservation du débit, déterminer la valeur de v.

(b) Que vaut la différence de pression $p_A - p_B$?

(c) Que vaut la différence de pression $p_B - p_C$?

A partir de maintenant, on suppose que les besoins nutritifs des tissus au voisinage du vaisseau supérieur augmentent. L'organisme se débrouille alors pour dilater le vaisseau concerné, de sorte que le rayon au point C augmente jusqu'à une valeur de $r_C = \alpha r$, le facteur de dilatation étant fixé à $\alpha = 1.1$. Le rayon du vaisseau inférieur ne change pas et reste donc à la valeur de r. Nous supposons toujours que les vitesses d'écoulement dans les deux vaisseaux sont égales.

(d) A quelle vitesse V' le coeur doit-il propulser le sang afin de maintenir la vitesse v_C égale à v?

2. On considère un fluide parfait et incompressible, de masse volumique ρ, dans une conduite verticale et ayant un rétrécissement tel que représenté sur la figure 2. On repère différents points de l'écoulement par A, B et C: les rayons en A et C sont égaux et notés R. Celui en B, où la conduite est plus étroite, est noté r, avec $r < R$. On suppose également que l'écoulement est non-turbulent et satisfait à la loi de conservation du débit. On note Q le débit dans la conduite et z_A, z_B, z_C les coordonnées des points A, B et C en utilisant l'axe des z comme sur la figure 2. On considère que l'écoulement a lieu dans le sens descendant.

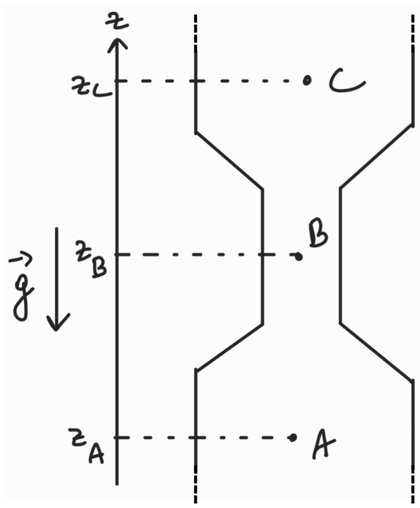

Figure 2: Un fluide s'écoule vers le bas dans une conduite de diamètre variable. On ne montre ici qu'une portion de la conduite, le système n'est pas ouvert à l'atmosphère.

Exprimez toutes vos réponses en fonction des paramètres du problème, à savoir r, R, z_A, z_B, z_C, Q et ρ.

(a) Que vaut la vitesse du fluide aux points A, B et C? $v_A = v_C = \frac{Q}{\pi R^2}$, $v_B = \frac{Q}{\pi r^2}$

(b) Que vaut la différence de pression $p_B - p_C$? $p_B - p_C = \frac{\rho Q^2}{2\pi^2}(R^{-4} - r^{-4}) + \rho g(z_C - z_B)$

(c) Que vaut la différence de pression $p_C - p_A$? $p_C - p_A = \rho g(z_A - z_C)$

(d) Que doit valoir r pour que la pression en B et en C soit identique? $r = (R^{-4} + \frac{2\pi^2 g}{Q^2}(z_C - z_B))^{-1/4}$

3. On considère un patient, allongé dans son lit, avec dans son bras une perfusion par laquelle on injecte un liquide incompressible et non-visqueux de masse volumique $\rho = 950 kg/m^3$ grâce à une seringue horizontale. Le piston de la seringue se déplace à une vitesse constante de norme $v = 0.2 cm/s$, et l'écoulement ainsi produit est supposé non-turbulent et le débit associé est conservé. On suppose de plus que la seringue se trouve à une hauteur $h = 90 cm$ du sol, alors que l'aiguille se trouve à une hauteur $H = 120 cm$.

La seringue est modélisée par un cylindre de rayon $R = 2 cm$ et de longueur $L = 12 cm$. Elle est raccordée au tuyau flexible, qui a un rayon de $r = 0.5 cm$. De plus, juste avant l'aiguille, une colonne d'une hauteur totale de $60 cm$ est insérée sur le tuyau. Cette colonne est ouverte à l'air libre et sert à mesurer la pression à cet endroit de l'écoulement. La pression de l'air est de $p_{\text{atm}} = 1 atm$.

Voir figure 3 pour un récapitulatif.

(a) Que vaut le débit Q dans cet écoulement? $Q = 2.5 \times 10^{-6} m^3/s$

(b) En supposant que la seringue est initialement totalement remplie, après combien de temps la seringue sera-t-elle complètement vidée? 60s

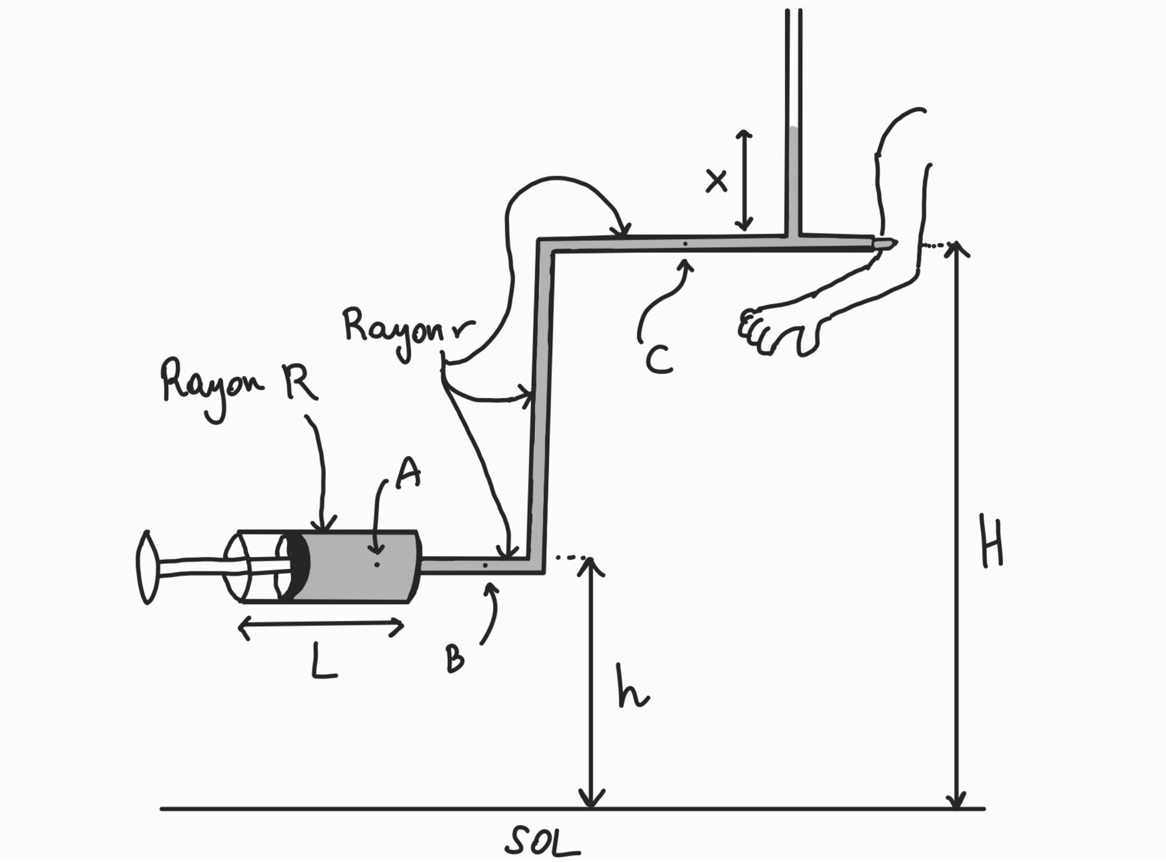

Figure 3: Une seringue pousse du liquide dans le bras d'un patient. Le point A est dans la seringue. Le point B est à la même hauteur que la seringue mais est dans le tuyau flexible. Le point C est également dans le tuyau flexible mais à la même hauteur que l'aiguille. On note p_A la pression du fluide en A et idem pour p_B et p_C.

(c) Que vaut la norme de la vitesse v_A du fluide au point A? $v_A = v$

(d) Que vaut la norme de la vitesse v_B du fluide au point B? $v_B = 3.2cm/s$

(e) Que vaut la norme de la vitesse v_C du fluide au point C? $v_C = 3.2cm/s$

(f) Quelle est la différence de pression $p_A - p_B$? $p_A - p_B = 0.4845Pa$

(g) Quelle est la différence de pression $p_B - p_C$? $p_B - p_C = 2850Pa$

(h) On mesure que le fluide dans la colonne est à une hauteur $x = 15cm$. Que vaut la différence de pression $p_C - p_{\text{atm}}$? $p_C - p_{\text{atm}} = 1425Pa$