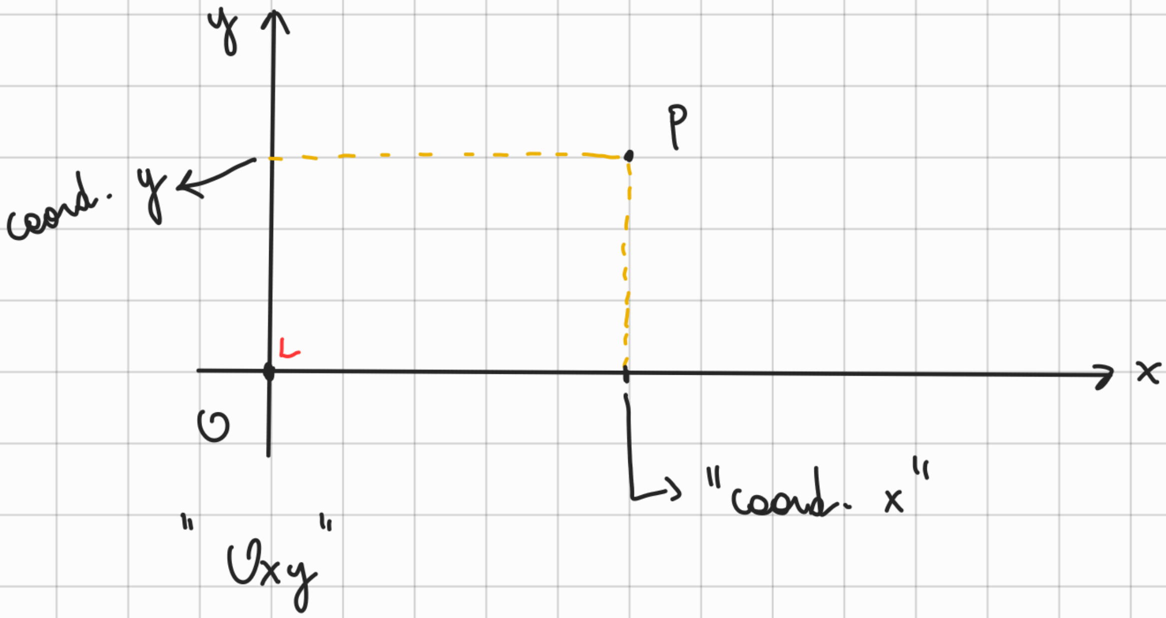
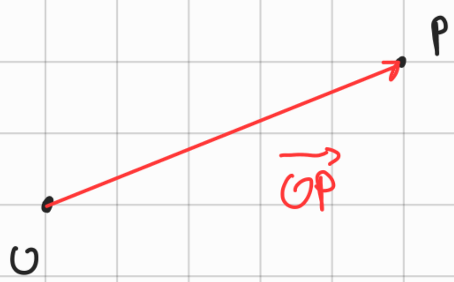
2. Cinématique en 2 et 3 dimensions

A. Coordonnées Cartesiennes en 2 d



B. Vecteur de position

<u>Définition</u> : un vecteur est la donnée combinée d'une direction et d'une longueur.



<u>Définition</u> : les composantes du vecteur position

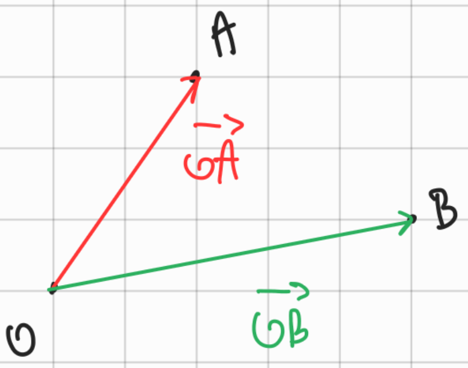
$\vec{OP}$ sont les coordonnées du point P dans le système d'axes Oxy.

Notation :

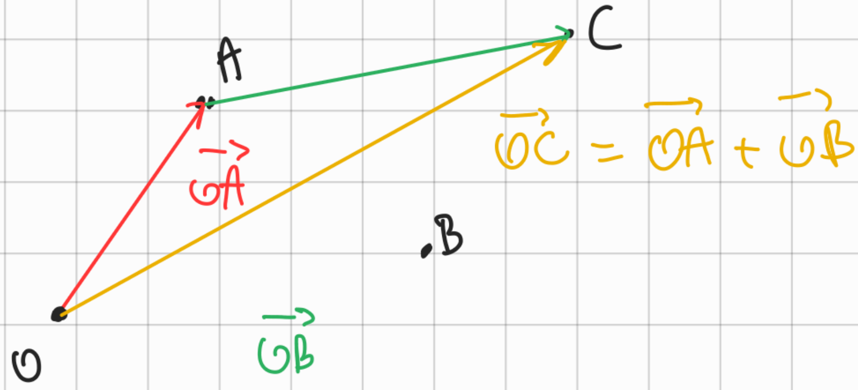
$$\vec{OP} = (x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

C. Opérations de base

a. Addition



$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$ où C est obtenu en mettant bout à bout les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.



En composantes :

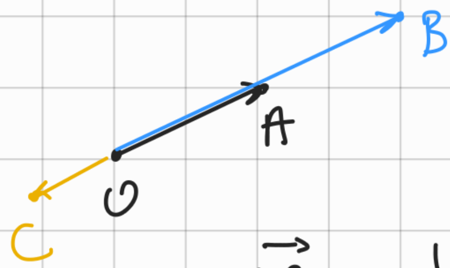
$\vec{OA} = (x_1, y_1)$ $\qquad$ $\vec{OB} = (x_2, y_2)$

$\Rightarrow \vec{OC} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Propriété : $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

6. Multiplication par un nombre

Définition : $\vec{OA}$ et a un nombre, le vecteur $a\vec{OA}$ est défini comme ayant la même direction que $\vec{OA}$ si $a>0$ et la direction opposée à $\vec{OA}$ si $a<0$, et de longueur égale à $|a| \times$ longueur de $\vec{OA}$.



$\vec{OB} = 2\vec{OA}$.

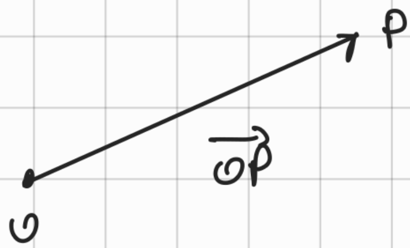
$\vec{OC} = -\frac{1}{2}\vec{OA}$

En composantes ?

$$a(x,y) = (ax, ay).$$

D. Décomposition norme / angle

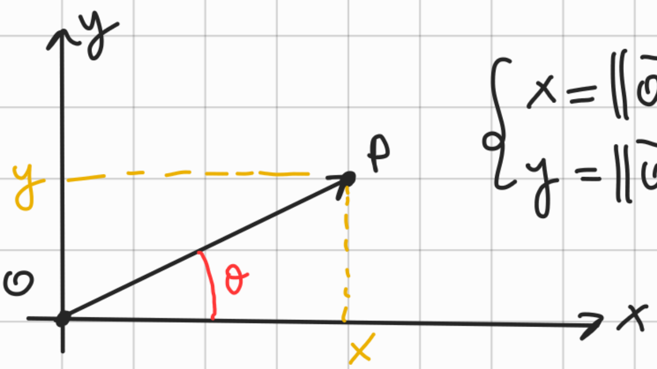
Définition : la norme du vecteur $\overrightarrow{OP}$ est sa longueur.



$$\text{Longueur} = \sqrt{x^2+y^2}$$

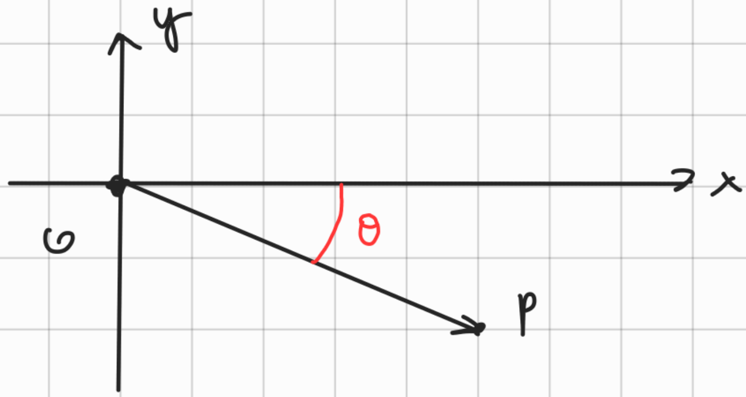
où (x,y) sont les composantes de $\overrightarrow{OP}$.

Notation : $\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2+y^2}$



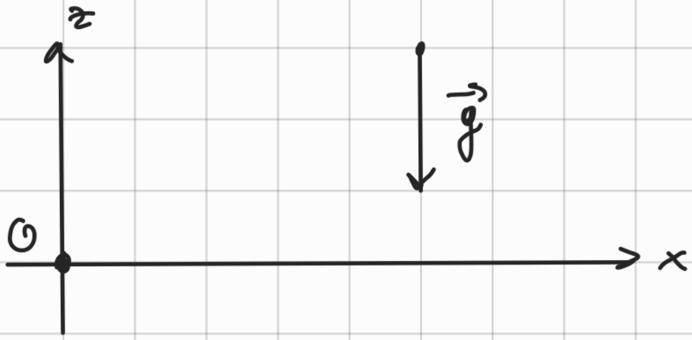
$$\begin{cases} x = \|\overrightarrow{OP}\| \cos\theta \\ y = \|\overrightarrow{OP}\| \sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{OP} = \|\vec{OP}\| \left(\cos\theta , \sin\theta \right)$$



$$\vec{OP} = \|\vec{OP}\| \left(\cos\theta, -\sin\theta \right)$$

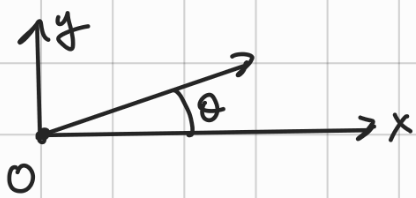
Exemple : Vecteur d'accélération gravitationnelle.



Oxz $\qquad \vec{g} = (0, -g)$

où $\quad g = 10 \, m/s^2$.

$$\vec{V} = (V_x, V_y)$$



$$\vec{V} = V(\cos\theta, \sin\theta) \qquad V = \|\vec{V}\|$$

E. Position, Vitesse, Accélération

$$P(t) \Rightarrow \overrightarrow{OP}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

Notation : $\overrightarrow{OP}(t) = \vec{r}(t)$ "vecteur position"

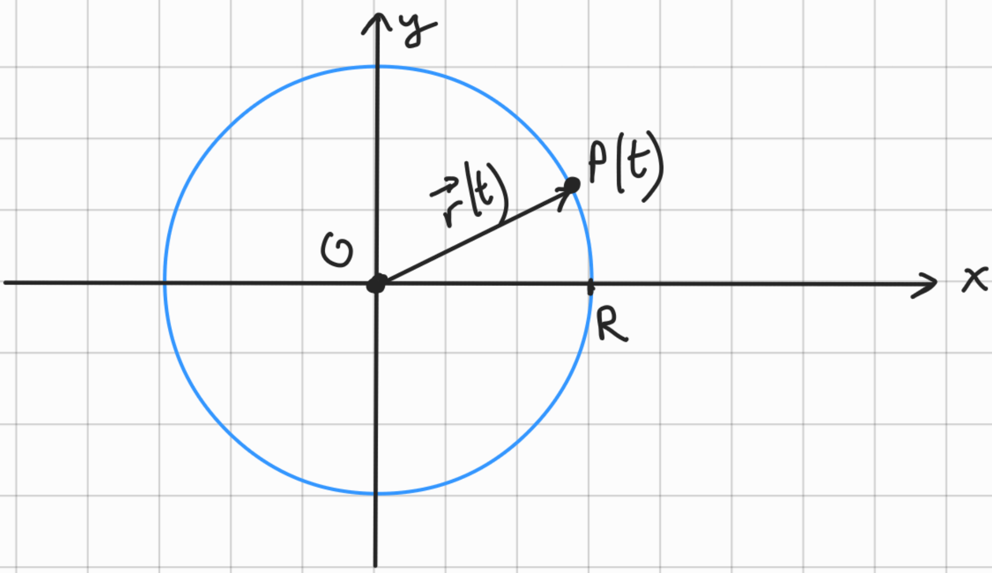
Vitesse : $\vec{v}(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$

Accélération : $\vec{a}(t) = \big(x''(t), y''(t)\big)$

Exemple : le Mouvement Circulaire Uniforme

Définition (Mouvement Circulaire) :

P est contraint de se déplacer sur un cercle de rayon R, centré en O :



$\vec{r}(t)$ est, par définition du MC, de norme R :

$$\|\vec{r}(t)\| = R.$$

On peut donc écrire les composantes de $\vec{r}(t)$ comme suit :

$$\vec{r}(t) = \Big(R\cos\theta(t),\quad R\sin\theta(t)\Big).$$

$\theta(t)$: angle entre $\vec{r}(t)$ et Ox.

Définition : un MC est dit Uniforme si $\theta(t)$ prend la forme

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

ω, θ_0 : paramètres.

$$[\omega] = \frac{[\text{angle}]}{T} \qquad [\theta_0] = [\text{angle}]$$

ω : "vitesse angulaire" $\quad$ θ_0 : "phase"

Calculons la vitesse et l'accélération :

$$\vec{v}(t) = \omega R \left(-\sin(\omega t+\theta_0),\ \cos(\omega t+\theta_0)\right)$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R\left(\cos(\omega t+\theta_0),\ \sin(\omega t+\theta_0)\right)$$

Remarque : ces formules sont valables lorsque ω est exprimé en radiants.

Normes ?

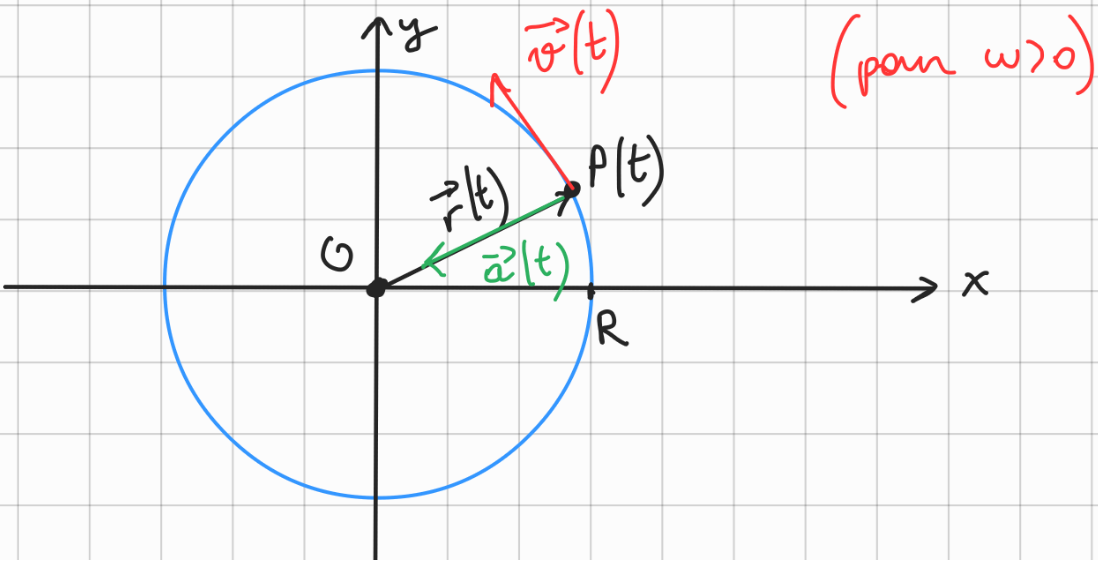
$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = |\omega| R$$

$$a(t) = \omega^2 R$$

Remarque : on peut aussi écrire

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t).$$

Représentation graphique :



Propriété : $\vec{r}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont toujours perpendiculaires