(20/10/2023)

III. Mécanique des Solides

1. Introduction

Jusqu'à présent : corps ponctuels.

Cap aux corps non-ponctuels :

1. Corps humain
2. Table
3. Dent
4. Vis
5. Air
6. Liquide

} Fluides → chapitre suivant

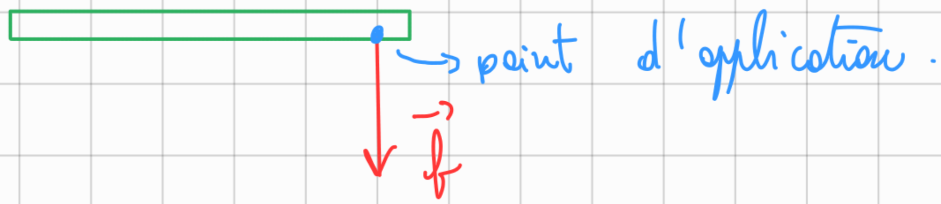
Définition : un corps solide est un corps dont les points sont à distances relatives constantes.

Ceci est un modèle pour de nombreux

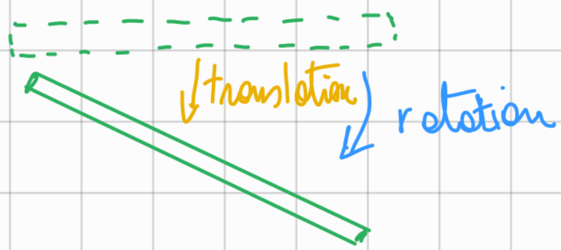
systèmes réalistes.

Question : comment peut-on décrire de tels systèmes à l'aide de la mécanique des corps ponctuels ?

2. Point d'application d'une force

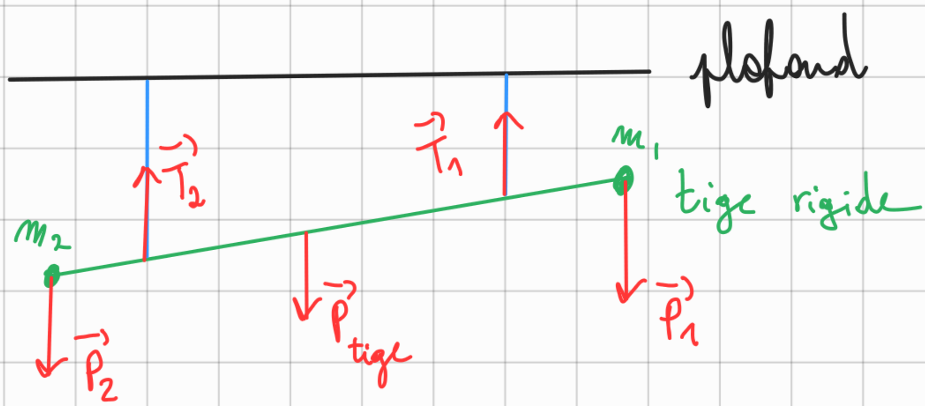


En général, le corps va se mettre en mouvement. Le mouvement est une combinaison d'une translation et d'une rotation. ("sur lui-même").

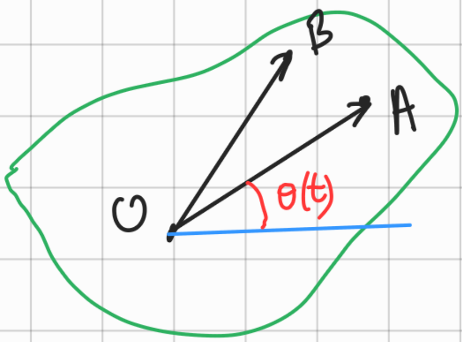


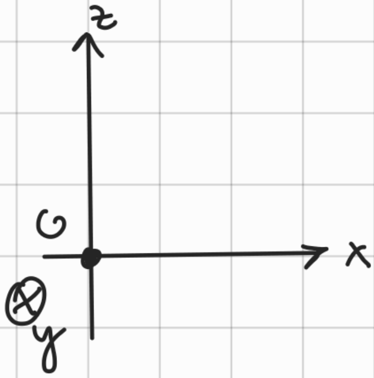
But du chapitre : comprendre comment ajuster les forces exercées sur le corps afin de le garder immobile.

Exemple :



3. Cinématique Angulaire





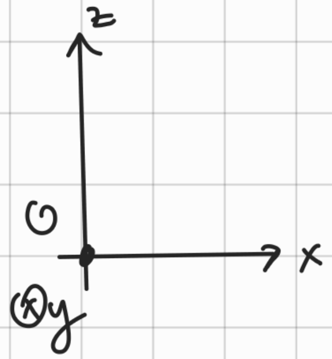
Angle θ $\neq$ de l'angle entre $\vec{OB}$ et Ox.

Mais les variations d'angle, $\Delta\theta$, seront toujours les mêmes.

Interlude mathématique : le produit vectoriel.

Définition : soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs.

On les décompose dans le système d'axes $Oxyz$:



$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

On appelle produit vectoriel de $\vec{A}$ avec $\vec{B}$ le vecteur noté $\vec{A} \times \vec{B}$ $(\vec{A} \wedge \vec{B})$ donné par :

$$(\vec{A} \times \vec{B})_x = A_y B_z - B_y A_z$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_y = A_z B_x - B_z A_x$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_z = A_x B_y - B_x A_y$$

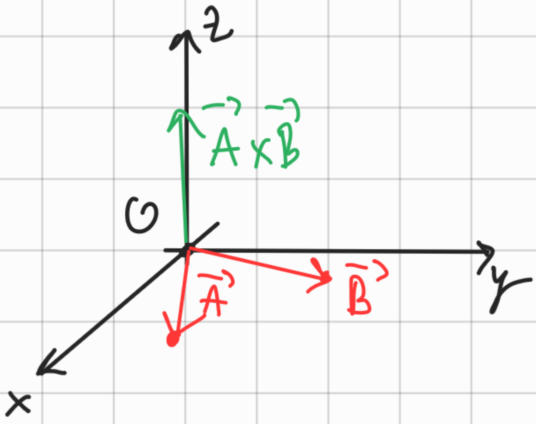
Rappel :

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} A_yB_z - B_yA_z, \\ -A_xB_z + B_xA_z, \\ A_xB_y - B_xA_y \end{pmatrix}$$

Propriétés :

1. $\vec{A} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{A}$

2. $\vec{A} \times \vec{B}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

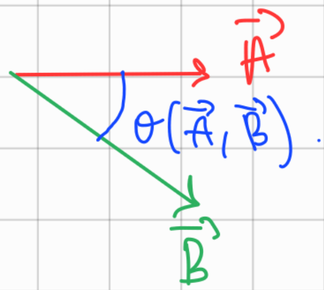


$\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont dans le plan Oxy et donc $\vec{A} \times \vec{B}$ est parallèle à Oz.

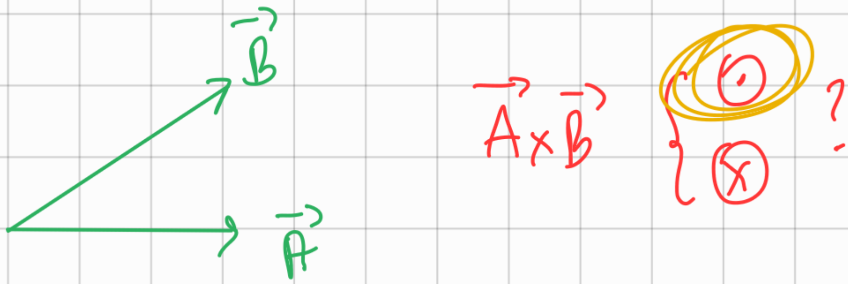
3. La norme de $\vec{A} \times \vec{B}$ se calcule facilement grâce à la formule :

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = AB \sin \theta(\vec{A}, \vec{B})$$

où $\theta(\vec{A},\vec{B})$ est l'angle compris entre 0 et π et formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.



4. Le sens de $\vec{A}\times\vec{B}$ est donné par la règle de la main droite.



(fin de l'interlude)

<u>Définitions :</u> pour un MC de centre O et de rayon R, et pour un point localisé par $\vec{r}(t)$

1. Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$:

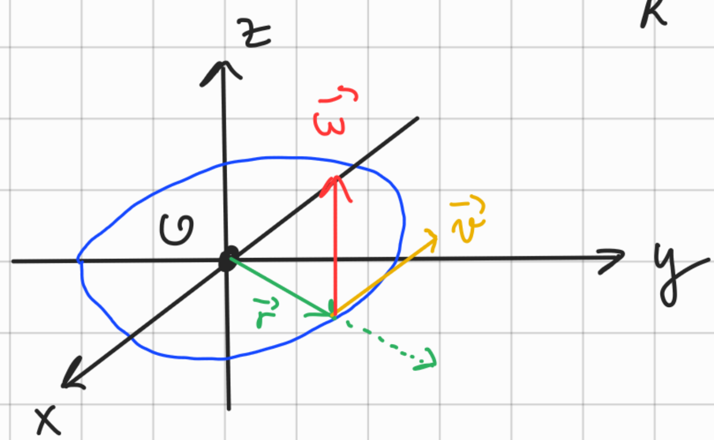
- norme $\omega = v/R$
- direction $\vec{r} \times \vec{v}$

[Autre formule : $\vec{\omega} = \frac{1}{R^2} \vec{r} \times \vec{v}$].

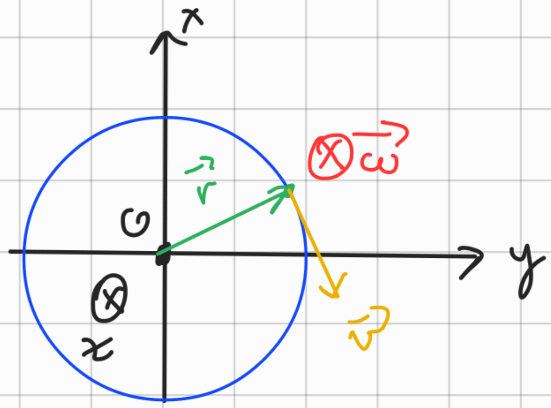
2. Le vecteur d'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ = dérivée de $\vec{\omega}$

- norme $\alpha = \frac{1}{R} a \sin\theta(\vec{r}, \vec{a})$
- direction $\vec{r} \times \vec{a}$

[Autre formule : $\vec{\alpha} = \frac{1}{R^2} \vec{r} \times \vec{a}$]



$\vec{\omega} \sim \vec{r} \times \vec{v}$

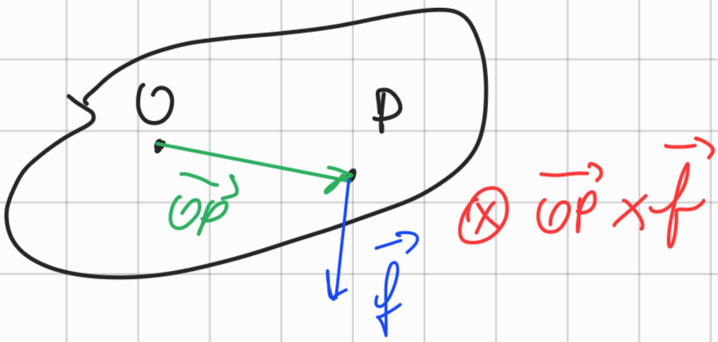


4. Le Moment de Force

Définition : $\vec{f}$ appliquée en point P d'un solide. Le Moment de la force $\vec{f}$, par rapport à O, est donné par :

$$\vec{\tau}_O(\vec{f}) = \vec{OP} \times \vec{f}$$

$[\vec{M}_O(\vec{f})]$.



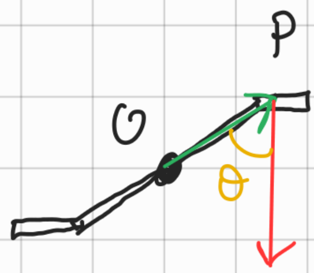
Remarque : si plusieurs forces s'appliquent sur le corps, on a autant de moments de force à calculer.

Cas particuliers :

1). Si $\vec{OP}$ est parallèle à $\vec{f}$,

alors $\vec{\tau}_O(\vec{f}) = \vec{0}$

2). Pédalier de vélo :



$\sin\theta = 0 \Rightarrow$ pédalier vertical

$\Rightarrow \vec{\tau}_O(\vec{f}) = \vec{0}$.

$\sin\theta = 1 \Rightarrow$ pédalier horizontal

$\Rightarrow \tau_O(\vec{f})$ est maximale

5. L'équation fondamentale de la mécanique des solides

Le moment de force total par rapport à un point O est noté $\vec{\tau}_O$:

$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_O(\vec{f}_1) + \vec{\tau}_O(\vec{f}_2) + \cdots$$

On a alors la relation :

$$\vec{\tau}_O = I_O \vec{\alpha} \qquad (1)$$

où $\vec{\alpha}$ est l'accélération angulaire du solide.

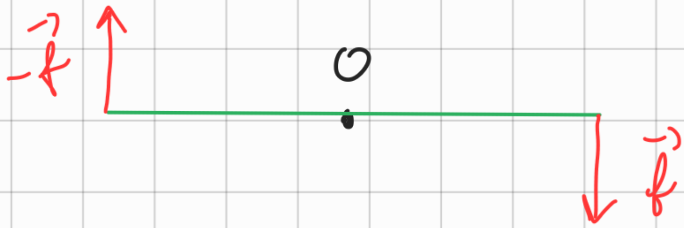
Ici, I_O est nombre appelé le "Moment d'Inertie" du solide par rapport à O.

Dans ce cours, on va toujours s'intéresser aux applications statiques : $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

Remarques :

1. On peut démontrer la formule (1) à partir de $\vec{F} = m\vec{a}$
2. Si la force totale $\vec{F} = \vec{0}$, cela n'implique PAS que le moment de force total est nul :

$$\vec{F} = \vec{0} \not\Rightarrow \vec{\tau}_O = \vec{0}$$



$$\vec{F} = \vec{f} + (-\vec{f}) = \vec{0}$$

Mais clairement, $\vec{\tau}_O \neq \vec{0}$.

Dans l'autre sens ? Non plus :

$$\vec{\tau}_O = \vec{0} \;\not\Longrightarrow\; \vec{F} = \vec{0}$$

3. Si $\vec{F} = \vec{0}$, alors le moment de force total peut être calculé par rapport à n'importe quel point.