(25/10/2023)

Petit rectificatif concernant l'accélération angulaire

Déf. : $\vec{\alpha}$ = dérivée de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

En particulier : $\vec{\omega} = \frac{1}{R^2} \vec{r} \times \vec{v}$

Petit calcul donne alors $\vec{\alpha} = \frac{1}{R^2} \vec{r} \times \vec{a}$.

$[\ (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\ ]$

Norme ? $\alpha = \frac{1}{R^2} \|\vec{r}\| \|\vec{a}\| \sin\theta$

où θ est l'angle entre 0 et π formé

par $\vec{r}$ et $\vec{a}$.

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{R} a \sin\theta$.

MCU : $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r} \Rightarrow \sin\theta = 0$.

$\Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$.

[Fin du rectificatif.]

Remarque : dimensions et unités de $\vec{\tau}_O$?

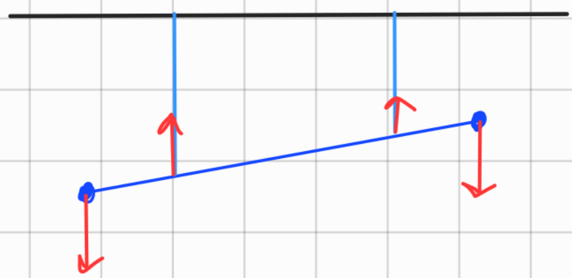
$$[\tau] = [\text{distance}][\text{force}] = L\, M L T^{-2} = M L^2 T^{-2}$$

Unités SI : $kg\, m^2 s^{-2} = Nm$

6. Centre de gravité d'un solide

Jusqu'à présent : nombre de forces exercées sur le corps est limité. Forces → localisées précisément.

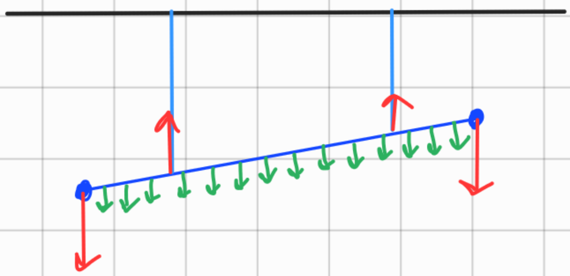
Exemple :



Si la masse de la tige est négligeable, ceci est une analyse complète.

Mais quid des cas pour lesquels ce n'est pas une bonne approximation ?

Problème : comment calculer le moment de force total dû au poids d'un corps ?



Moment de force de ces flèches vertes ??

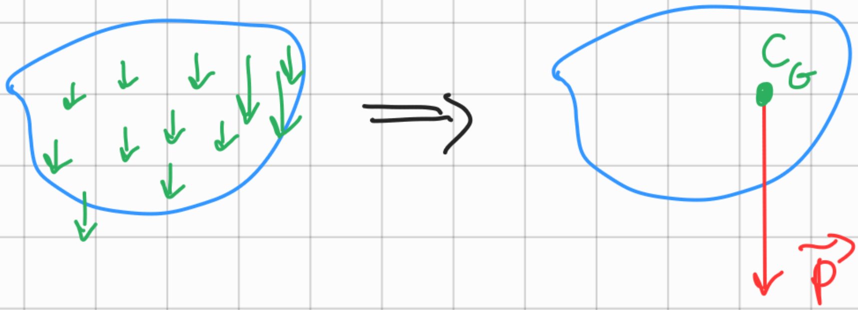
Rappel : $\vec{\tau}_O(\vec{f}_1) + \vec{\tau}_O(\vec{f}_2) + \dots$

$\neq \vec{\tau}_O(\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \dots)$.

Propriété : il existe un point appelé le Centre de Gravité, noté C_G, tel que le moment de force total dû au poids est donné par

$$\vec{OC_G} \times \vec{P}$$

où $\vec{P}$ = poids total du corps.



Question : comment trouver C_G ?

1. Existe des méthodes expérimentales.

2. Existe des formules, qui nécessitent de connaître la distribution de la masse.

3. Peut être donné dans un énoncé.

Cas particulier : si la distribution de masse est homogène dans le corps, alors le centre de gravité est situé au centre géométrique du corps.

Autre remarque :

Si $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ sont exercées en P_1 et P_2

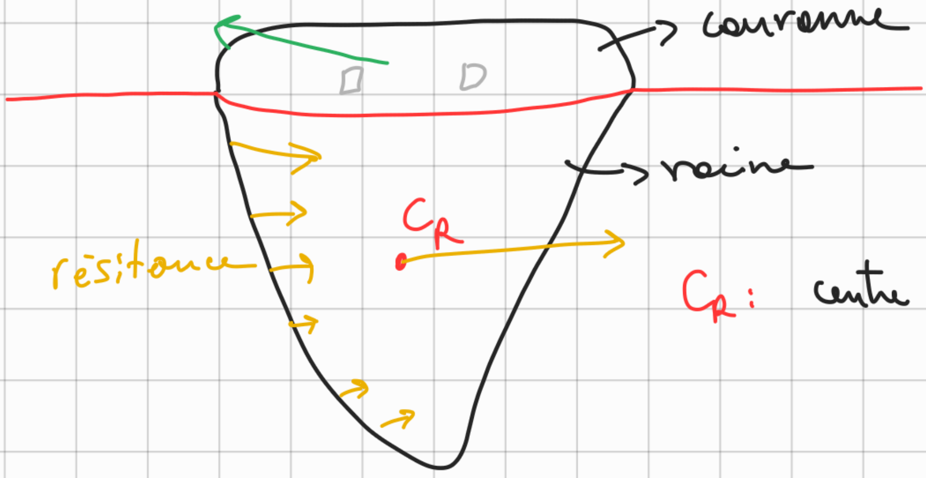
respectivement, alors le centre de gravité est donné par :

$$\overrightarrow{OC_G} = \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1 \overrightarrow{OP_1} + m_2 \overrightarrow{OP_2} \right).$$

Remarque : centre de masse = centre de gravité pour autant que le champ de gravitation est homogène.

$\vec{P} = m\vec{g}$ $\vec{g}$ = vect. constant.

Généralisation de la notion de centre de gravité.



C_R : centre de résistance.

Question d'examen (PHYS G1102, 202223, janvier)

Q3.

1. $\vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{N_3} = ?$

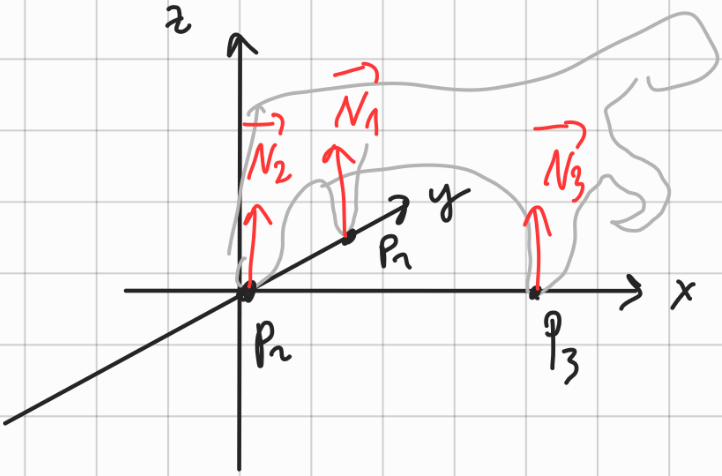
Immobile $\Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$

$\vec{F} = \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{N_3} + \vec{P}$

où $\vec{P} = m\vec{g}$ (poids total).

$\Rightarrow \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{N_3} = -\vec{P} = -m\vec{g}$.

2. $\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_1})$, $\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_2})$, $\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_3})$?



$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_2}) = \vec{0}$ car $\vec{N_2}$ appliquée en P_2.

$$\left(\underbrace{\overrightarrow{P_2P_2}}_{=\vec{0}} \times \vec{N_2} \right).$$

$$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_1}) = \overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{N_1}$$

Norme : $\|\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_1})\| = \underbrace{\|\overrightarrow{P_2P_1}\|}_{d} N_1 \underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1}$.

Direction : règle de la main droite :

$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_1})$ est dans le sens de Ox.

$$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_1}) = (dN_1, 0, 0)$$

$$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_3}) = (\dots) = (0, -LN_3, 0)$$

3. $\vec{\tau}_{P_2}(\vec{P}) = \overrightarrow{P_2C_G} \times \vec{P}$

$$\overrightarrow{P_2C_G} = \left(\frac{3L}{4}, \frac{d}{5}, h\right)$$

$$\vec{P} = (0, 0, -mg)$$

$$\overrightarrow{P_2C_G} \times \vec{P} = \left(-\frac{mgd}{5}, mg\frac{3L}{4}, 0\right)$$

4. $\vec{N_1}, \vec{N_2}, \vec{N_3}$?

Conditions d'équilibre :

$$\vec{F} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\vec{\tau}_{P_2} = \vec{0} \qquad (2)$$

$(1) \Rightarrow \quad N_1 + N_2 + N_3 = mg$.

$(2) \Rightarrow \quad \vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_1}) + \underbrace{\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_2})}_{=0} + \vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_3}) + \vec{\tau}_{P_2}(\vec{P}) = \vec{0}$.

$Ox : \quad dN_1 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \frac{mgd}{5} = 0$

$Oy : \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - LN_3 \quad + mg\frac{3L}{4} = 0$

3 équations pour inconnues $\Rightarrow$ on peut résoudre !

$$N_1 = \frac{mg}{5} \qquad N_3 = \frac{3mg}{4}$$

$$N_2 = mg - N_1 - N_3 = mg\left(1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{20}{20} - \frac{4}{20} - \frac{15}{20} = \frac{1}{20} \Rightarrow N_2 = \frac{mg}{20}.$$

$$\vec{N_1} = \left(0, 0, \frac{mg}{5}\right) \qquad \vec{N_2} = \left(0, 0, \frac{mg}{20}\right)$$

$$\vec{N_3} = \left(0, 0, \frac{3}{4} mg\right).$$