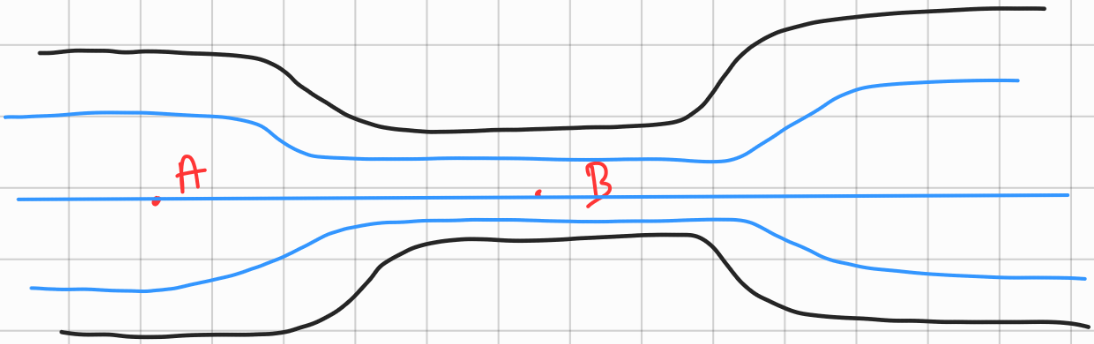
(17/11/2023)

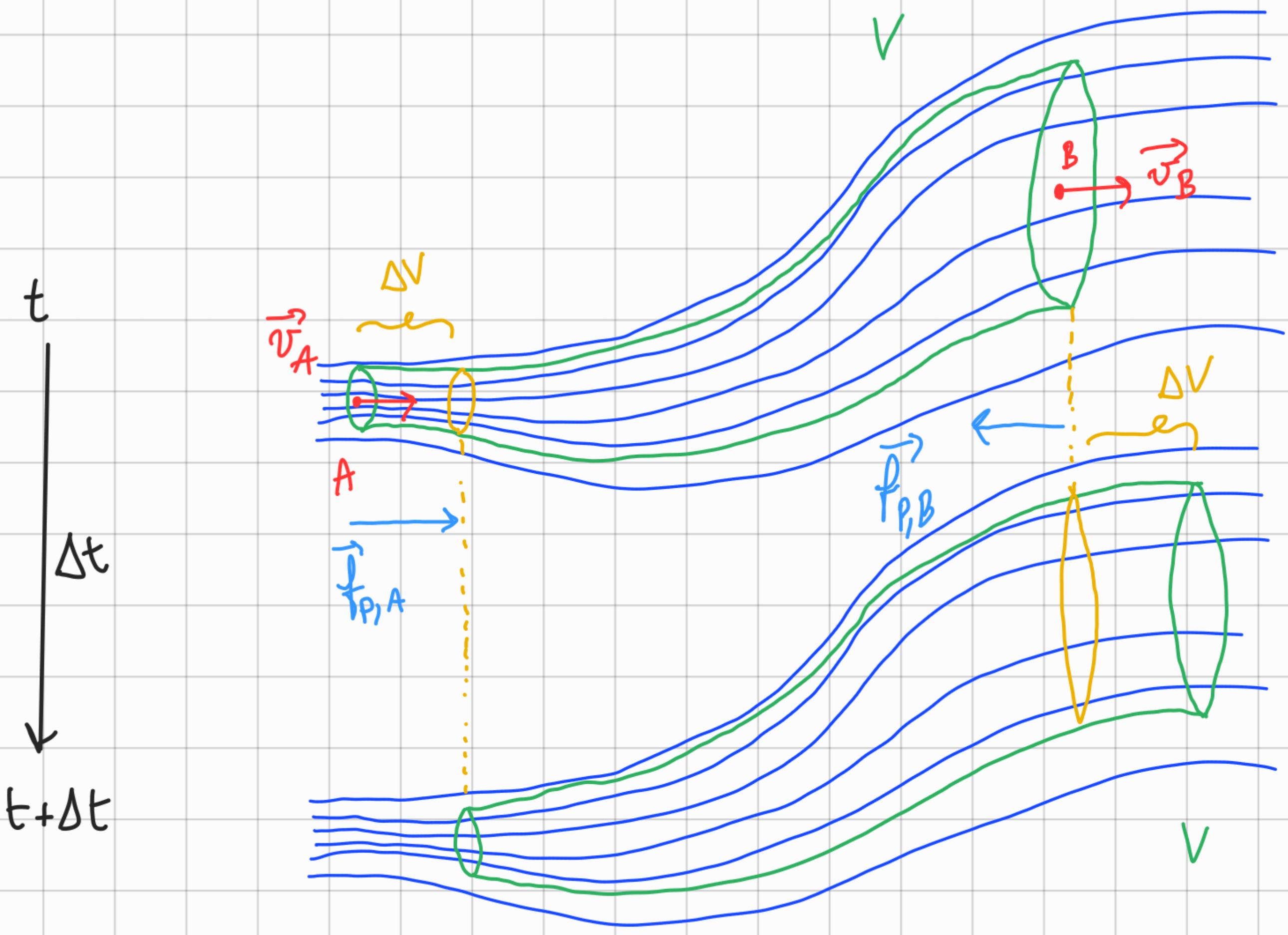


Conservation du débit : $v_A S_A = v_B S_B$

Si $S_B < S_A \Rightarrow v_B > v_A$

$\Rightarrow p_B < p_A$.

Démonstration du Théorème de Bernoulli



$E(t+\Delta t) - E(t) = \Delta E$

= variation d'énergie mécanique du volume V sur l'intervalle de temps allant de t à $t + \Delta t$.

E : énergie cinétique

+ énergie potentielle gravitationnelle.

$\Delta E = \Delta E_{\Delta V} = E_{\Delta V}(t+\Delta t) - E_{\Delta V}(t)$

$E_{\Delta V}$ = énergie mécanique du volume ΔV.

$$E_{\Delta V}(t) = \frac{1}{2}(\rho \Delta V) v_A^2 - (\rho \Delta V)\vec{g} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$E_{\Delta V}(t+\Delta t) = \frac{1}{2}(\rho \Delta V) v_B^2 - (\rho \Delta V)\vec{g} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\Delta E_{\Delta V} = \Delta V \left(\frac{1}{2}\rho v_B^2 - \frac{1}{2}\rho v_A^2 - \rho\left(\vec{g} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})\right)\right)$$

$$= \Delta V \left(\frac{1}{2}\rho v_B^2 - \frac{1}{2}\rho v_A^2 - \rho\, \vec{g} \cdot \overrightarrow{AB} \right)$$

$$\left(\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{AO} = \vec{AB}\right)$$

D'autre part, on sait que

$$\Delta E = W$$

où W = travail des forces (autres que le poids) s'exerçant sur le volume V.

Fluide non-visqueux $\Rightarrow$ W = travail des forces de pression.

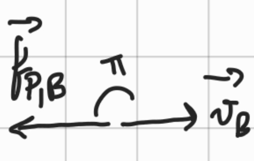
Comme Δt est petit, on peut écrire

$$W(t, t+\Delta t) = \mathcal{P}\,\Delta t$$

où $\mathcal{P}$ est la puissance des forces de pression.

$$\mathcal{P} = \vec{f}_{P,A} \cdot \vec{v}_A + \vec{f}_{P,B} \cdot \vec{v}_B$$

$$= f_{P,A} v_A - f_{P,B} v_B$$



$$\vec{f}_{P,B} \cdot \vec{v}_B = f_{P,B} v_B \cos\theta \qquad \cos\pi = -1$$

$$f_{p,A} = S_A \, p_A \qquad f_{p,B} = S_B \, p_B$$

$$\Rightarrow \mathcal{P} = S_A \, p_A \, v_A - S_B \, p_B \, v_B$$

$$= Q_A \, p_A - Q_B \, p_B$$

$$= Q \, (p_A - p_B) \quad \text{car débit conservé.}$$

$$\Rightarrow W = \mathcal{P} \Delta t = Q \Delta t \, (p_A - p_B)$$

$$= \Delta V \, (p_A - p_B)$$

$$\Rightarrow \Delta E_{\Delta V} = \Delta E = W = \Delta V \, (p_A - p_B)$$

$$= \Delta V \left(\frac{1}{2} \rho v_B^2 - \frac{1}{2} \rho v_A^2 - \rho \vec{g} \cdot \overrightarrow{AB} \right)$$

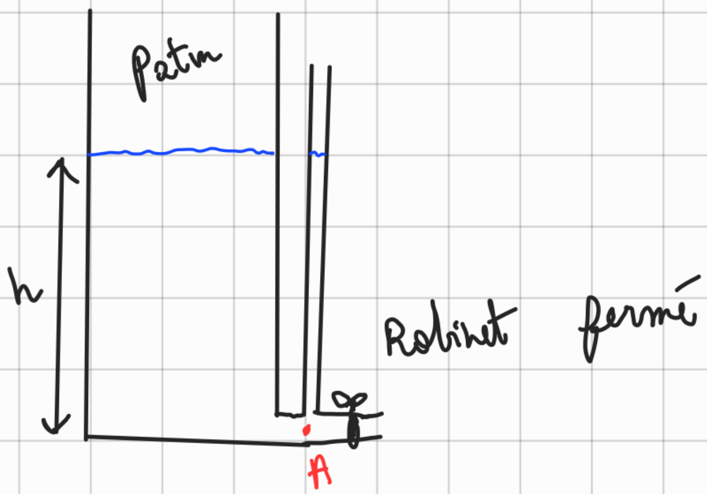
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho v_A^2 - \rho \vec{g} \cdot \overrightarrow{OA} + p_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 - \rho \vec{g} \cdot \overrightarrow{OB} + p_B$$

$$\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \right)$$

$$\Rightarrow e_A = e_B$$

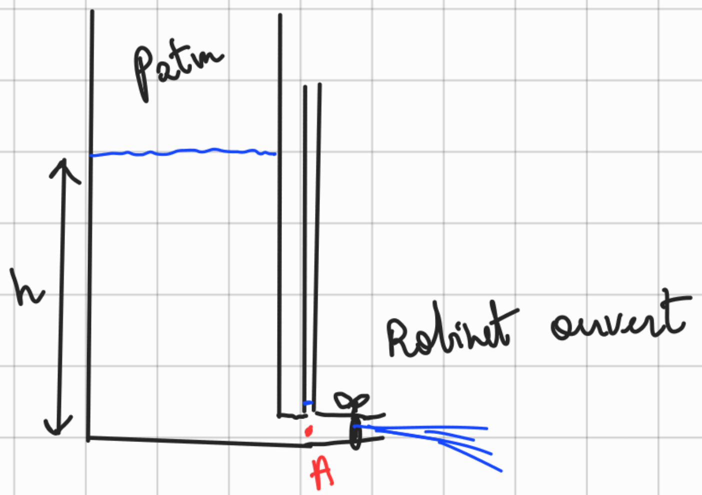
où $e = \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \vec{g} \cdot \overrightarrow{OP} + p$.

Application : la fontaine de Bernoulli

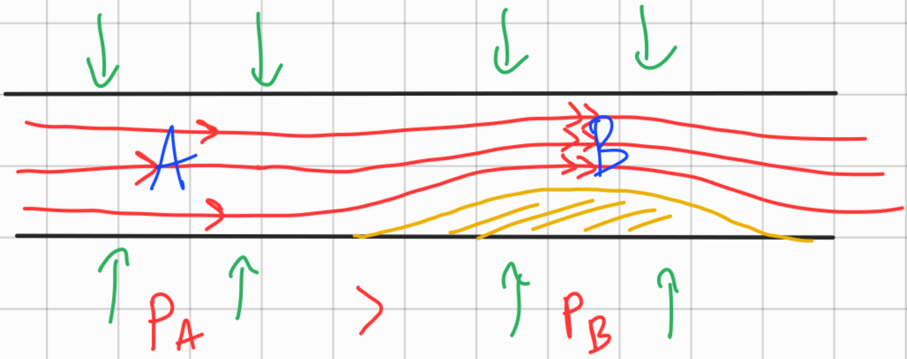


$$P_A = P_{atm} + \rho g h$$

Robinet ouvert ? $P_A = P_{atm}$. $\Rightarrow v_A \neq 0$.

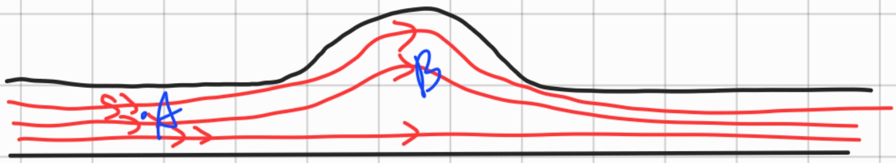


Application :



$\Rightarrow$ excès de pression extérieure en B.

$\Rightarrow$ risque d'effondrement du vaisseau.



$v_A > v_B$ $\qquad$ $vS = Q$

$P_A < P_B$

$\Rightarrow$ l'élargissement risque de s'accroître.