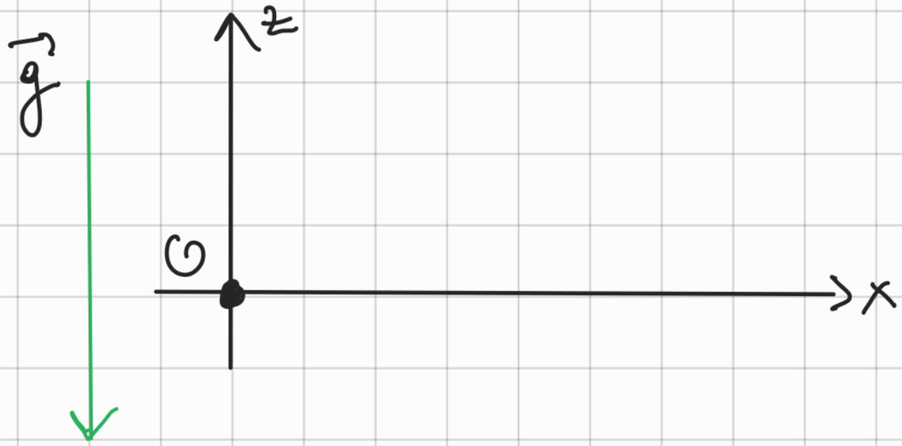
4/10/2023

Exemples (décomposition norme/angle)

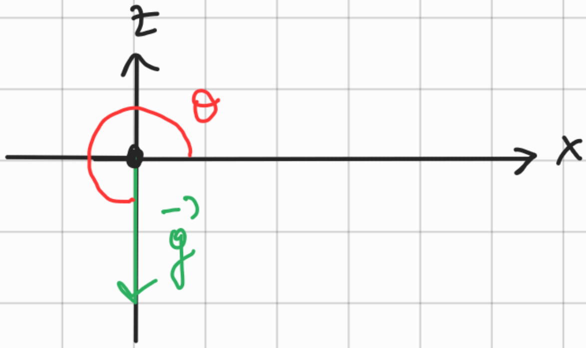
1). Vecteur d'accélération gravitationnelle



$$\Rightarrow \quad \vec{g} = (0, -g)$$

où $g = \|\vec{g}\| = 10\, m/s^2$.

Norme/angle ?



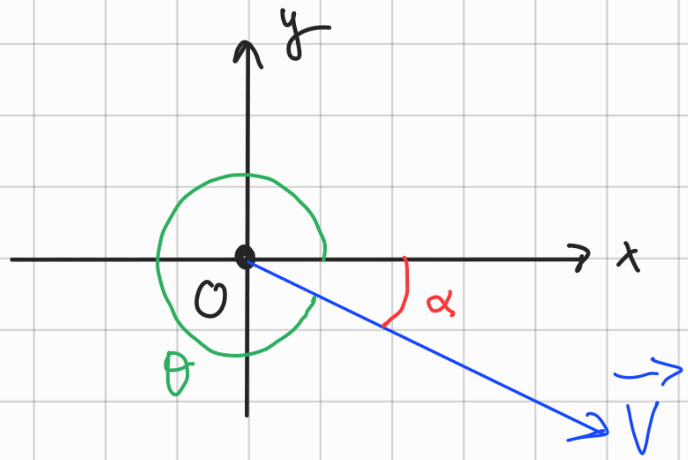
$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\vec{g} = g\,(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\Rightarrow \quad \vec{g} = g\,(0, -1) = (0, -g)$$

2).



$$\vec{V} = V\left(\cos\alpha\,,\ -\sin\alpha\right)$$

$$\vec{V} = V\left(\cos\theta\,,\ \sin\theta\right)$$

α et θ ne sont pas indépendants !

On doit avoir $\alpha + \theta = 2\pi$.

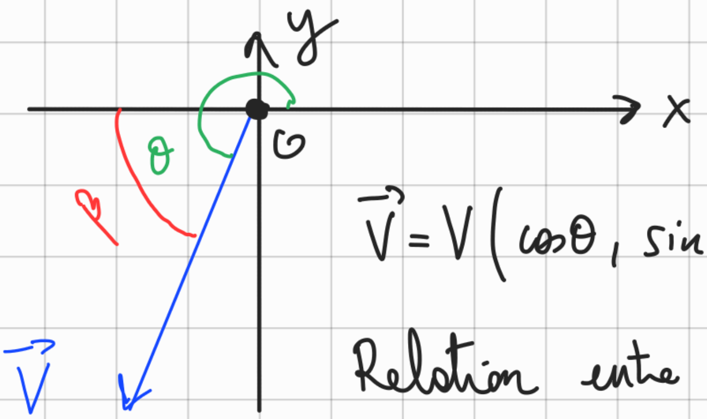
$\Rightarrow \quad \theta = 2\pi - \alpha$

$$\cos\theta = \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin\theta = \underbrace{\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha}$$

$\rightarrow$ guidance !

3).



$$\vec{V} = V\left(\cos\theta, \sin\theta\right)$$

Relation entre θ et β ?

$$\pi + \beta = \theta$$

$$\cos\theta = \cos(\pi+\beta) = -\cos\beta$$

$$\sin\theta = \sin(\pi+\beta) = -\sin\beta$$

$$\Rightarrow \vec{V} = V(-\cos\beta, -\sin\beta)$$

$$= -V(\cos\beta, \sin\beta).$$

E. Position, Vitesse, Accélération

$$P(t) \Rightarrow \overrightarrow{OP(t)} = (x(t), y(t))$$

Vitesse ? Dérivée de $\overrightarrow{OP(t)}$.

$$\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$$

$$\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t))$$

Exemples :

a). MRUA $\left(z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right)$

$$\left(\overrightarrow{OP(t)} = \vec{r}(t) \right)$$

notation pour $\overrightarrow{OP(t)}$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

$\vec{g}$: vect. vertical, norme $g = 10\ m/s^2$,
pointant vers le bas.

$\vec{r}_0, \vec{v}_0$: paramètres.

Vitesse ? $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} t$

Accélération ? $\vec{a}(t) = \vec{g}$.

Conclusion : pour un MRUA,
l'accélération ne dépend pas
du temps.

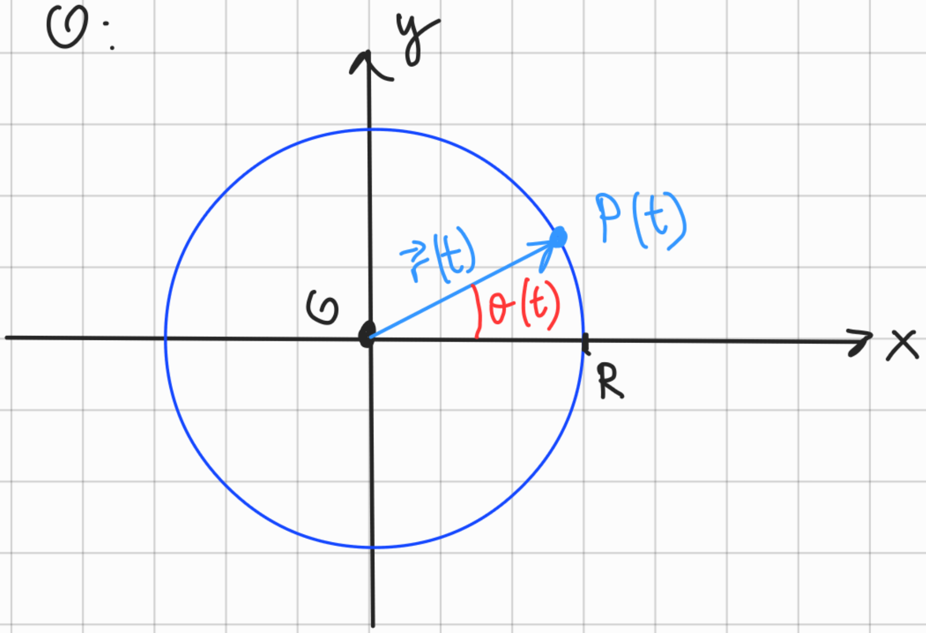
Interprétation des paramètres $\vec{r}_0$ et $\vec{v}_0$?

$\vec{r}_0 = \vec{r}(t = 0\,s)$ "position initiale"

$\vec{v}_0 = \vec{v}(t = 0s)$ "vitesse initiale".

b). Le Mouvement Circulaire Uniforme (MCU).

<u>Définition</u> : le Mouvement Circulaire (MC) : P doit rester sur un cercle de rayon R et centré en O :



Mouvement sur un cercle $\Rightarrow \|\vec{r}(t)\| =$ constante.

$\|\vec{r}(t)\| = R.$

$\Rightarrow \vec{r}(t) = R\left(\cos\theta(t), \sin\theta(t)\right).$

$\theta(t)$: a priori, n'importe quelle fonction du temps.

Définition : le MCU est un MC avec la contrainte suivante :

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

ω et θ_0 : paramètres.

Dimensions :

$$[\theta(t)] = [\text{angle}]$$

$\rightarrow [\theta_0] = [\text{angle}]$ $\qquad \theta_0 = \frac{\pi}{5}$

$$[\omega t] = [\text{angle}]$$

$\hookrightarrow [\omega] = \frac{[\text{angle}]}{T}$ $\qquad \omega = 0.2\,\pi/s$.

Récap. : pour un MCU,

$$\boxed{\vec{r}(t) = R\left(\cos(\omega t + \theta_0),\ \sin(\omega t + \theta_0)\right)}.$$

Interprétation de θ_0 ?

$$\theta(t = 0s) = \theta_0$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t=0s) = R\left(\cos\theta_0, \sin\theta_0\right)$$

Pour ω ? → "vitesse angulaire"

Question : combien de temps dure un tour complet ?

Réponse : on appelle T ce temps à trouver.

Par définition :

$$\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi$$

$$\theta(t+T) = \omega(t+T) + \theta_0$$

$$= \omega t + \omega T + \theta_0$$

$$= \underbrace{\omega t + \theta_0}_{\theta(t)} + \omega T$$

$\Rightarrow \quad \omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

On appelle T la période de ce mouvement.

Autre quantité intéressante :

La fréquence ν (ou f) est

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Calculons $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$.

$\vec{v}(t) = ?$

la dérivée de $\begin{cases} \sin ax & = a\cos ax \\ \cos ax & = -a\sin ax \end{cases}$

$$\vec{v}(t) = \omega R\left(-\sin(\omega t + \theta_0),\ \cos(\omega t + \theta_0)\right)$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R\left(\cos(\omega t + \theta_0),\ \sin(\omega t + \theta_0)\right)$$

Remarque : $\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$.

Question : que vaut la norme de $\vec{v}(t)$?

$$\left[\vec{v} = (v_x, v_y) \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \, . \right]$$

$$v(t) = \sqrt{\left(-\omega R \sin(\omega t + \theta_0)\right)^2 + \left(\omega R \cos(\omega t + \theta_0)\right)^2}$$

$$= \sqrt{(\omega^2 R^2)\underbrace{\left(\sin(\omega t + \theta_0)^2 + \cos(\omega t + \theta_0)^2\right)}_{(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1}}$$

$$= |\omega| R \, .$$

La dépendance temporelle a disparu !

$\vec{v}(t)$ est de norme constante.