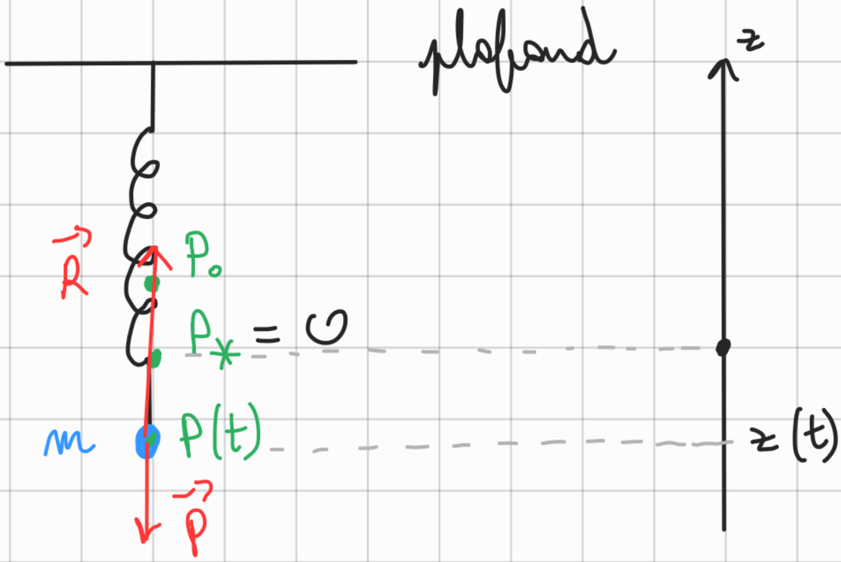
(30/10/2023)

B. Application dynamique



P_0 = position d'équilibre si $m=0$

P_* = " " si $m \neq 0$

$P(t)$ = position de la masse au cours du temps.

$$\vec{F} = \boxed{\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a}}$$

But : comprendre comment ceci détermine la trajectoire.

$$\vec{R} + \vec{P} = -k\,\overrightarrow{P_0P} + m\vec{g}$$

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0P_*} + \overrightarrow{P_*P} \qquad \text{(cf. addition des vecteurs)}$$

$$\Rightarrow \vec{R} + \vec{P} = -k\left(\overrightarrow{P_0P_*} + \overrightarrow{P_*P}\right) + m\vec{g}$$

$$= \underbrace{-\cancel{k\overrightarrow{P_0P_*}}}_{} - k\overrightarrow{P_*P} \cancel{+m\vec{g}}$$

force de rappel si la masse est en P_*. $\Rightarrow -k\overrightarrow{P_0P_*} = -\vec{P} = -m\vec{g}$

$$= -k\overrightarrow{P_*P}$$

Conclusion : $\vec{F} = -k\overrightarrow{P_*P}$

$\vec{F} = -k\overrightarrow{OP}$

$\Rightarrow F_z = -kz$ (composante suivant z de $\vec{F}$).

$m\vec{a} \longrightarrow$ composante suivant z : $m z''$.

On trouve l'équation suivante :

$$\boxed{-kz = m z''}$$

Ceci est une équation pour la fonction $z(t)$. "Equation différentielle".

Solution ?

$$z(t) = A \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$z'(t) = \omega A \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$z''(t) = -\omega^2 \underbrace{A \sin(\omega t + \theta_0)}$$

$$= -\omega^2 z(t)$$

On veut $\quad -kz = mz''$

$$\Leftrightarrow z'' = -\frac{k}{m} z$$

On trouve que $z(t) = A \sin(\omega t + \theta_0)$ est une solution de l'équation différentielle si on fixe ω tel que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

" $\vec{F} = m\vec{a}$ " ne fixe <u>pas</u> les paramètres A et θ_0.

A et θ_0 sont choisis par l'expérimentateur.

A = amplitude → dépend d'où on "lâche la masse".

θ_0 = phase ?

Comment peut-on la choisir ?

→ revient à choisir l'instant initial.

$z(t=0) = A \sin \theta_0$

Si on veut choisir la position initiale en t_0 plutôt que en $t=0$?

$z(t_0) = A \sin(\omega t_0 + \theta_0)$

$\omega t_0 + \theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \omega t_0$

$\Rightarrow z(t) = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \omega t_0\right)$

$= A \sin\left(\omega(t - t_0) + \frac{\pi}{2}\right)$

$= A \cos\left(\omega(t - t_0)\right).$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$$

Remarque :

On sait que pour un mouvement harmonique, la période T vaut :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\left[\sin\left(\omega(t+T)+\theta_0\right) = \sin\left(\omega t+\theta_0\right)\right]$$

La fréquence $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Dans notre cas : $\omega^2 = k/m$.

Donc $\omega = \sqrt{k/m}$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

Expérience : $m_0 = 112g$ $\Delta m = 20g$

n	$m = m_0 + n\Delta m$	$10T$	$T/\sqrt{m}$
0	112g	9.19s	$2.75\sqrt{m/N}$
1	132g	9.97s	$2.74\sqrt{m/N}$
2	152g	10.69s	$2.74\sqrt{m/N}$
3	172g	11.35s	$2.74\sqrt{m/N}$

$$\frac{T}{\sqrt{m}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}.$$

$$\sqrt{k} = 2\pi / T/\sqrt{m}$$

$$k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} = 5.27\ N/m.$$