(06/11/2023)

IV. Théorèmes de conservation

1. Energie, Puissance et Travail

1.1. Energie Cinétique

Définition : corps de masse m et de vitesse $\vec{v}$, alors l'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Dimension ?

$$[E_c] = M L^2 T^{-2}$$

SI : $kg\, m^2 s^{-2} = J$ (Joule)

Remarques :

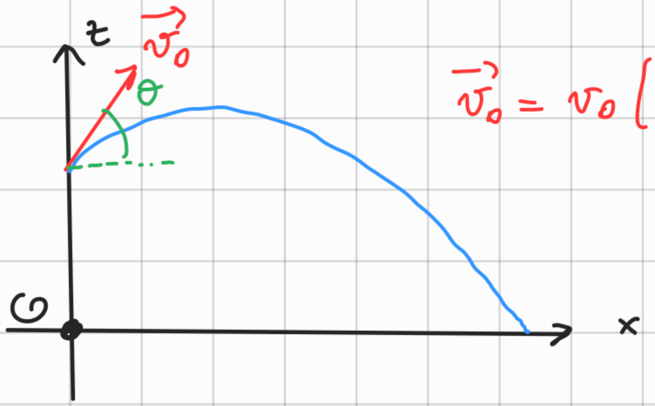
1. $E_c > 0$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $E_c = 0$ si $\vec{v} = \vec{0}$. (On a jamais $E_c < 0$).

2. En général, l'énergie cinétique dépend du temps.

Exemples :

1. MRUA : $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t$

Si on note θ l'angle que fait $\vec{v}_0$ avec l'axe Ox :



$$\vec{v}_0 = v_0(\cos\theta, \sin\theta)$$

Alors : $E_c = \cdots = \frac{m}{2}\left(v_0^2 - 2g\,v_0 \sin\theta\; t + g^2 t^2\right)$

2. MH : $E_c = \cdots = \frac{k}{2} A^2 \left(\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \theta_0\right)\right)^2$

1.2. Forces conservatives et Energie potentielle

Idée : Energie "totale" $E = E_c + E_p$.

E_p va être choisie telle que

E (= énergie totale) ne

dépend pas du temps.

"E est conservée".

L'énergie potentielle existe pour un

certain type de forces, que l'on

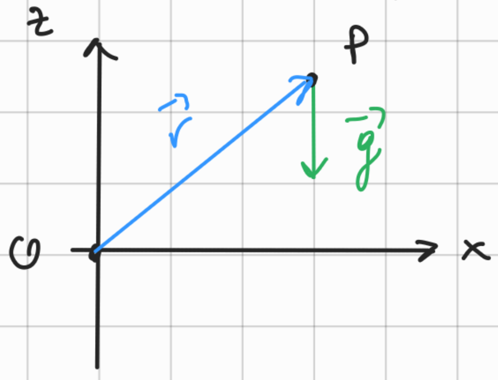
appelle conservatives.

Exemples :

1. Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

$\Rightarrow E_p = -m\vec{g}\cdot\vec{r}$

où $\vec{r}$ est la position du corps.



$\vec{r} = (x, z)$

$\vec{g} = (0, -g)$

$\Rightarrow \vec{g}\cdot\vec{r} = -gz \Rightarrow \boxed{E_p = mgz}$

2. Rappel : $\vec{R} = -k\,\overrightarrow{P_0P}$

$\Rightarrow E_p = \frac{k}{2} \|\overrightarrow{P_0P}\|^2$

Dimensions ? $\quad [k] = \frac{[\text{force}]}{L} = MT^{-2}$

$[E_p] = MT^{-2}L^2$ ok !

Vérification sur les exemples :

1. $E_c = \frac{m}{2}\left(v_0^2 - 2g\,v_0 \sin\theta\, t + g^2 t^2\right)$

$E_p = mgz$

MRUA : $z(t) = z_0 + v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$

$\Rightarrow E_p = mg z_0 + mg\,v_0 \sin\theta\, t - \frac{m}{2} g^2 t^2$

$E_c + E_p = \frac{m}{2} v_0^2 - mg\,\cancel{v_0 \sin\theta\, t} + \cancel{\frac{m}{2} g^2 t^2}$

$+ mg z_0 + mg\,\cancel{v_0 \sin\theta\, t} - \cancel{\frac{m}{2} g^2 t^2}$

Conclusion : $E = E_c + E_p$ ne dépend pas du temps !

2. MH : $E_p = \dots = \frac{k}{2} A^2 \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \theta_0\right)\right)^2$

$$E = E_c + E_p = \frac{k}{2} A^2 \left(\left(\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \theta_0\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \theta_0\right)\right)^2 \right)$$

$$= \frac{k}{2} A^2$$

$\Rightarrow$ $E_c + E_p$ ne dépend pas du temps.

Propriété : si toutes les forces s'exerçant sur le corps sont conservatives, alors l'énergie totale E est conservée.

Ceci peut se démontrer à partir de $\vec{F} = m\vec{a}$.

1.3. Puissance et Travail

Idée : formaliser la notion de transfert d'énergie.

Définition : pour un corps de vitesse $\vec{v}$ et sur lequel une force $\vec{f}$ s'exerce, on définit la puissance associée à $\vec{f}$ par :

$$\mathcal{P}(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{f}$$

Dimensions : $[\mathcal{P}] = LT^{-1} MLT^{-2} = ML^2T^{-3}$

SI : $kg\, m^2 s^{-3} = W$ (Watt)

Remarque : unités de Wh = ?

$$[1Wh] = ML^2T^{-3}T = ML^2T^{-2}$$
$$= [\text{énergie}].$$

$$\Rightarrow \mathcal{P} \sim \frac{\text{énergie}}{\text{temps}}$$

Pour être précis, on doit préciser de quelle force il s'agit dans la notation pour $\mathcal{P}$. On note alors $\mathcal{P}_{\vec{f}}$

Propriété : si on prend $\vec{f} = \vec{F}$ (= la force totale), alors :

$$\mathcal{P}_{\vec{F}}(t) = E_c'(t).$$

dérivée de l'énergie cinétique

Démonstration : bonus.

$$\vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot (m\vec{a}) = \dots = \left(\frac{1}{2} m v^2\right)'$$

Cas particulier : si $\mathcal{P}_{\vec{F}}$ est constante, alors

$$\mathcal{P}_{\vec{F}} = \frac{\Delta E_c}{\Delta t}$$

Cas général :

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}_{\vec{F}} \, dt = E_c(t_1) - E_c(t_0) = \Delta E_c.$$

[Rappel : $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$]

Définition : pour une force $\vec{f}$ exercée sur un corps, le travail $W_{\vec{f}}(t_0,t_1)$ par

$$W_{\vec{f}}(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}_{\vec{f}}(t)\,dt .$$

Cas particulier : si $\mathcal{P}_{\vec{f}}$ est constante, alors :

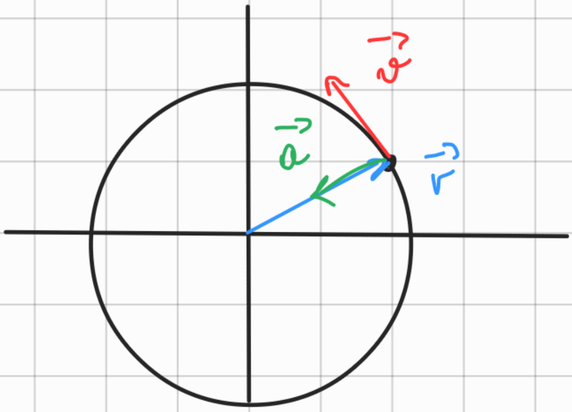
$$W_{\vec{f}} = \mathcal{P}_{\vec{f}}\,\Delta t$$

$W_{\vec{f}}$ = énergie apportée ou enlevée sous l'effet de la force $\vec{f}$ durant l'intervalle de temps Δt.

Cas particuliers

1. Si $\vec{f}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$.

MCU :



Dans ce cas, $\vec{F}$ est proportionnelle à $\vec{r}$, donc perpendiculaire à $\vec{v}$.

On a alors $\mathcal{P}_{\vec{f}} = 0$.

$\Rightarrow$ la force $\vec{f}$ ne modifie pas l'énergie du corps : $W_{\vec{f}} = 0$.

2. Si $\vec{f}$ est constante ?

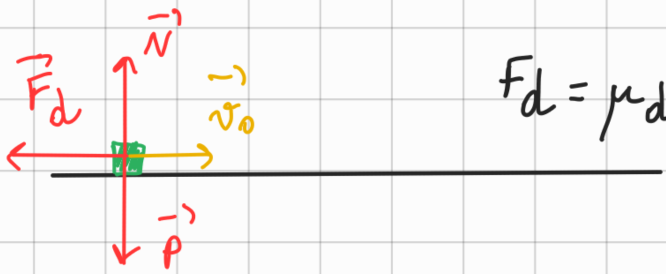
Alors :

$$W_{\vec{f}} = \vec{f} \cdot \vec{d}$$

où $\vec{d}$ = vecteur déplacement.

$$\vec{d} = \Delta\vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0).$$

Exemple : force de frottement dynamiques.



$F_d = \mu_d N$ (constant)

Si on a un déplacement $\vec{d}$

de norme d, alors

$$\vec{F_d} \cdot \vec{d} = -\mu_d N d$$

Conséquence : $W_{\vec{F_d}} < 0$.

Interprétation : les forces de frottement dynamiques dissipent de l'énergie.

Cas général :

Question : quelle est la relation entre le travail et l'énergie potentielle ?

Pour une force $\vec{f}$ conservative, on trouve : $W_{\vec{f}} = -\Delta E_p$.

Si maintenant la force totale est la somme de forces conservatives et de forces non-conservatives, alors :

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + W_{n.c.}$$

où $W_{n.c}$ = travail des forces non-conservatives.

On a donc

$$\boxed{\Delta E = W_{n.c}}.$$ Equation du bilan d'énergie.

où $\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p$.

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p$$

$$\Delta E_c = W = -\Delta E_p.$$

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{R} \rightarrow E_p = -m\vec{g}\cdot\vec{r} + \frac{k}{2}\|\vec{r_0 P}\|^2.$$