I. Mécanique des Solides

1. Introduction

Jusqu'à présent : 1 ou plusieurs corps ponctuels.

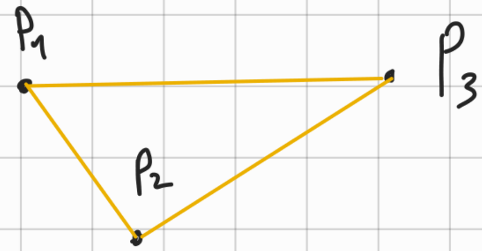
Corps non-ponctuels :

- corps humain (avant-bras, ...) } Corps déformable
- table
- dent
- vis

} Corps solides (rigides)

- air, l'eau, sang ... → FLUIDES

Définition : un corps solide est un système à plusieurs corps ponctuels, tels que leurs distances relatives sont constantes.



$$\|\overrightarrow{P_1P_2}\|,\ \|\overrightarrow{P_1P_3}\|,\ \|\overrightarrow{P_2P_3}\| = \text{constantes}.$$

Question : comment décrire la dynamique des corps solides à partir de la dynamique des corps ponctuels ?

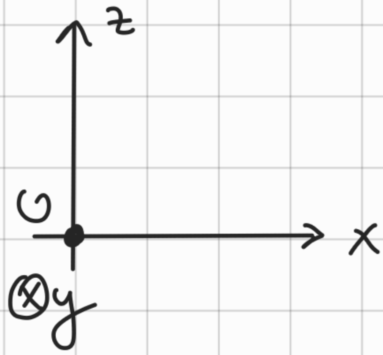
En particulier : comment ajuster les forces extérieures exercées sur un corps solide pour que celui-ci soit immobile ?
("Statique des Solides").

2. Parenthèse mathématique : le produit vectoriel

Idée : nouvelle opération entre 2 vecteurs.

Définition : soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs décomposés dans un système d'axes Oxyz :

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$
$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$



Le produit vectoriel de $\vec{A}$ avec $\vec{B}$, noté $\vec{A} \times \vec{B}$ est défini par :

$$(\vec{A}\times\vec{B})_x = A_y B_z - A_z B_y$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})_y = A_z B_x - A_x B_z$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$$

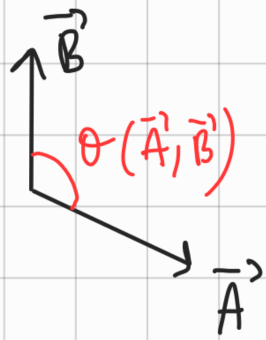
$$\begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - B_y A_z, \\ A_z B_x - A_x B_z, \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

Propriétés :

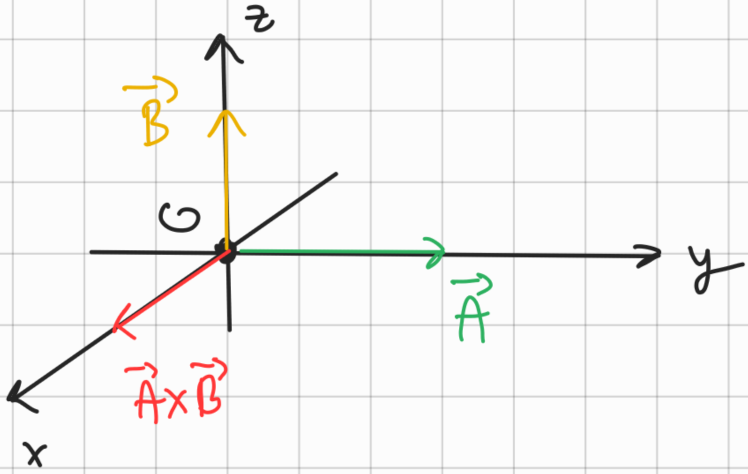
1). La norme de $\vec{A} \times \vec{B}$ est donnée par la formule :

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = AB \sin \theta(\vec{A}, \vec{B})$$

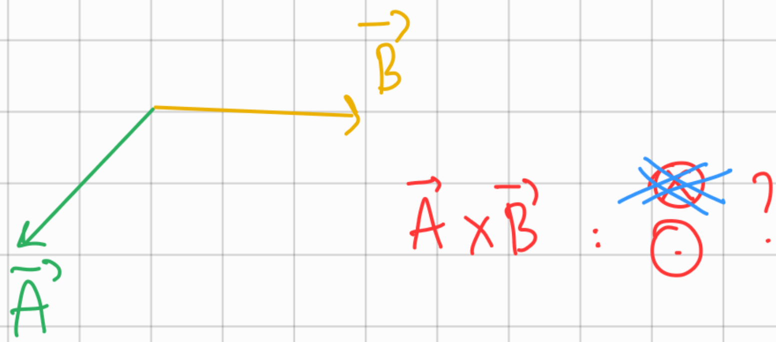
où $\theta(\vec{A}, \vec{B})$ est l'angle compris entre 0 et π et formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

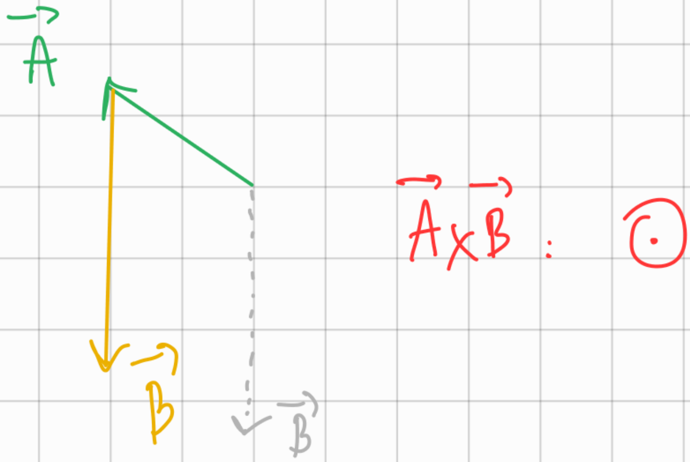


2). La direction de $\vec{A} \times \vec{B}$ est donnée par la règle de la main droite.



Autre exemple :



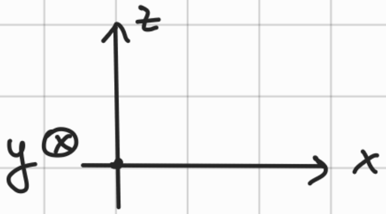


Remarques :

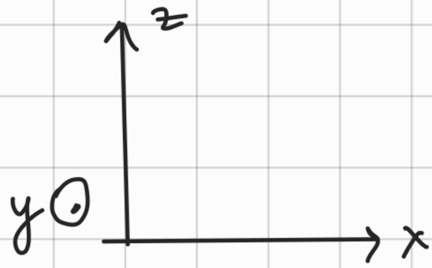
1. Le vecteur $\vec{A} \times \vec{B}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

2. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

3. Le système d'axes utilisé est "important". En particulier, on a choisi l'orientation des axes de la façon suivante :



On ne prend PAS le syst. d'axes avec l'orientation suivante :



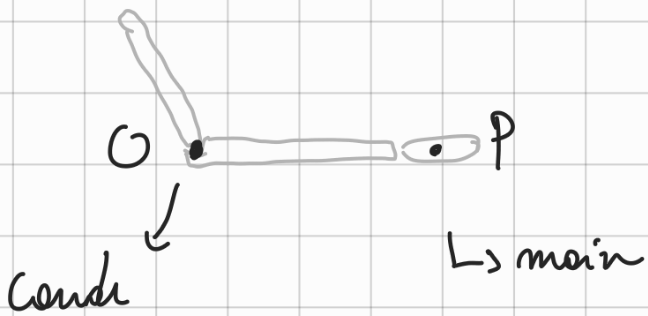
⚠ NON.

4. Si $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$, alors $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont soit parallèles () soit anti-parallèles ().

3. Cinématique angulaire

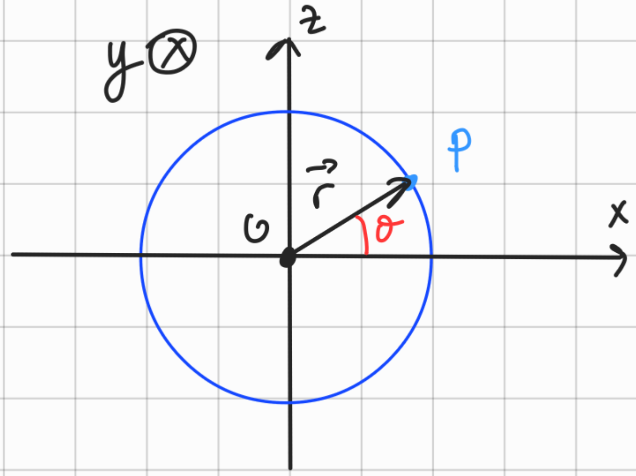
Idée : cinématique des mouvements de rotation.

Considérons un solide fixé à un pivot. [Pivot = point du solide, immobile, autour duquel le solide peut tourner.]



P se déplace sur un cercle de rayon $\|\overrightarrow{OP}\| = R$ et centré sur O.

$\Rightarrow$ MC.



$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{GP(t)}$$

$$\|\vec{r}(t)\| = R.$$

$$\vec{r}(t) = R\left(\cos\theta,\ 0,\ \sin\theta\right)$$

θ = fonction du temps !

$$\theta = \theta(t).$$

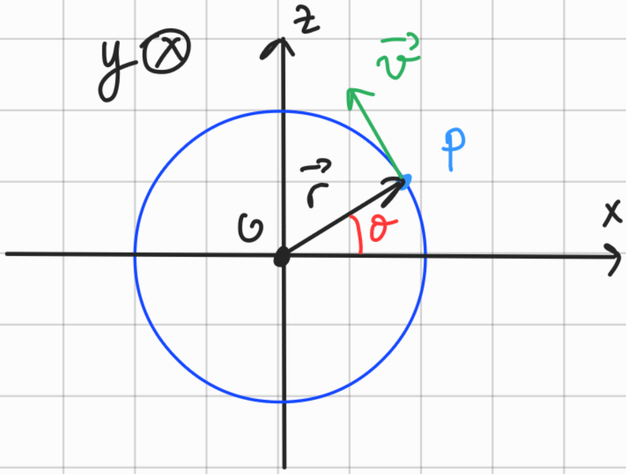
Cinématique angulaire → description de la trajectoire à travers la fonction $\theta(t)$.

$\vec{v}(t)$ = vitesse = dérivée de $\vec{r}(t)$.

Définitions :

1. Vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{R^2}\,\vec{r} \times \vec{v}$$



$\vec{\omega}$ ⊙

⇝ θ augmente (à cet instant).

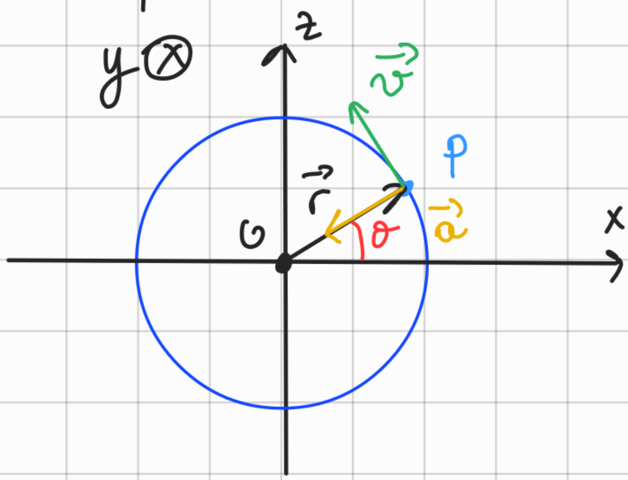
Norme : $\omega = \frac{1}{R^2} R v = \frac{v}{R}$.

$(\sin\theta(\vec{r},\vec{v}) = 1)$.

2. Vecteur accélération angulaire $\vec{\alpha}$:

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{R^2}\,\vec{r} \times \vec{a}.$$

Si on a un MCU, alors on sait que $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$.



$\vec{a}$ et $\vec{r}$ sont anti-parallèles :

donc $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0}$ et donc $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

Si $\vec{\alpha} = \vec{0}$ alors le $\vec{\omega}$ est constant. En réalité, on a la relation :

$$\vec{\alpha} = \text{dérivée de } \vec{\omega}.$$

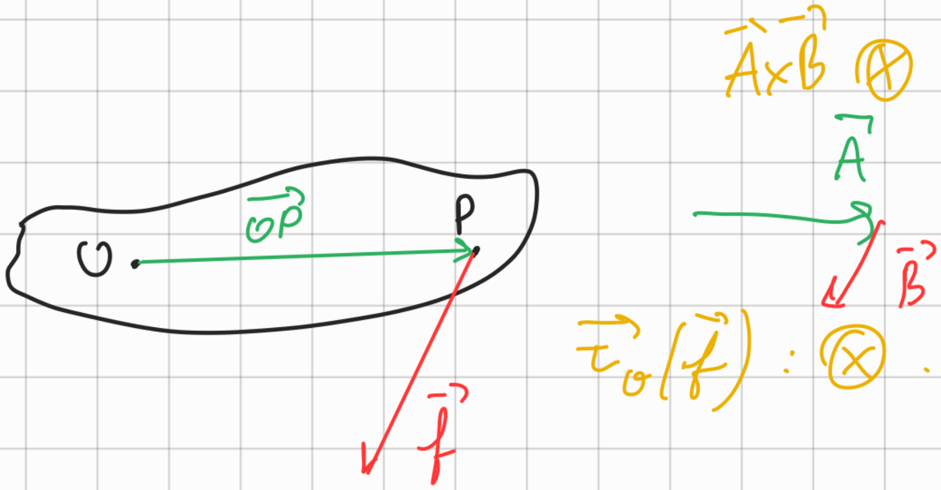
Le but de ce chapitre est de comprendre quelle est la relation entre $\vec{\alpha}$ et les forces exercées sur le solide.

En particulier : pour le cas $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

4. Le Moment de Force

Définition : si une force $\vec{f}$ est appliquée en un point P du solide, alors on définit un nouveau vecteur "Moment de Force" par rapport à l'origine O :

$$\vec{\tau}_O(\vec{f}) = \vec{OP} \times \vec{f}$$



Théorème : (Relation fondamentale de la dynamique des solides)

Si $\vec{\tau}_O$ est le moment de force total, alors

$$\vec{\tau}_O = I_O \vec{\alpha}$$

où :

$\vec{\alpha}$ = accélération angulaire du solide

I_O = moment d'inertie par rapport à O

$\vec{\tau}_O$ = somme des moments de forces sur le corps.

$$= \vec{OP_1} \times \vec{f_1} + \vec{OP_2} \times \vec{f_2} + \vec{OP_3} \times \vec{f_3} + \cdots$$

Condition d'équilibre poun les rotations :

$$\vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau}_O = \vec{0}.$$

Dans ce cours, on considère principalement des applications statiques. En conséquence, nous n'avons pas besain de connaître la valeur de I_O.