(29/11/2023)

Loi de Pascal

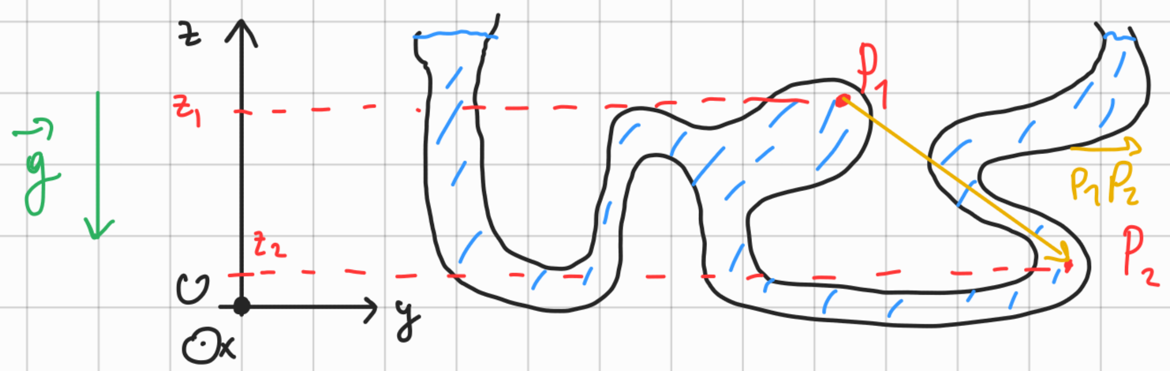
Pour un fluide incompressible au repos, la différence de pression Δp entre 2 points P_1 et P_2 du fluide est donnée par :

$$\Delta p = p(P_1) - p(P_2) = \rho \, \vec{g} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$$

où $\vec{g}$ = vecteur d'accélération grav.

ρ = masse volumique du fluide.

Dans un système d'axes $Oxyz$



$[z_2 < z_1 \quad z_2 - z_1 < 0]$

$$\vec{g} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = -g(z_2 - z_1) = g(z_1 - z_2)$$

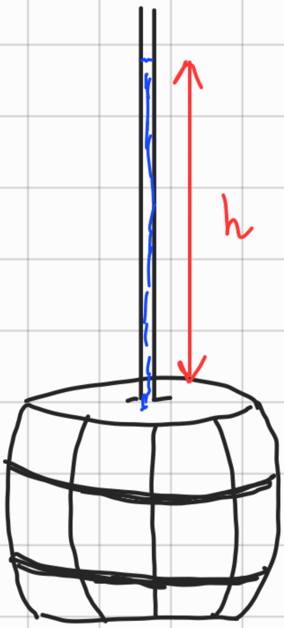
$$\Rightarrow \Delta p = \rho g (z_1 - z_2) \qquad z_1 > z_2 \Rightarrow \Delta p > 0.$$

Remarque : incompressible = ρ ne dépend pas de la pression.

eau : $\rho_0 \nearrow$ de 1% $\Longleftrightarrow$ $p = 224$ atm.

Applications :

1. Crève-tonneau de Pascal.

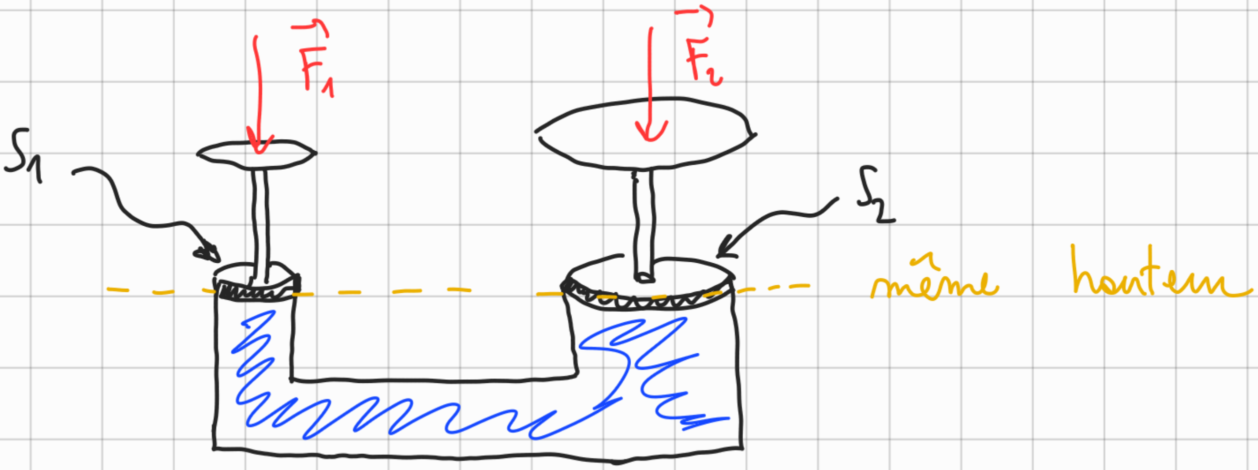


$\rightsquigarrow$ tonneau rempli d'eau

$P_{intérieure} = p_{atm} + \rho_0 g h$

Même si le volume d'eau dans la colonne est très petit, si la hauteur est suffisante, la pression intérieure sera suffisante pour faire "exploser" le tonneau.

2. Presse hydraulique



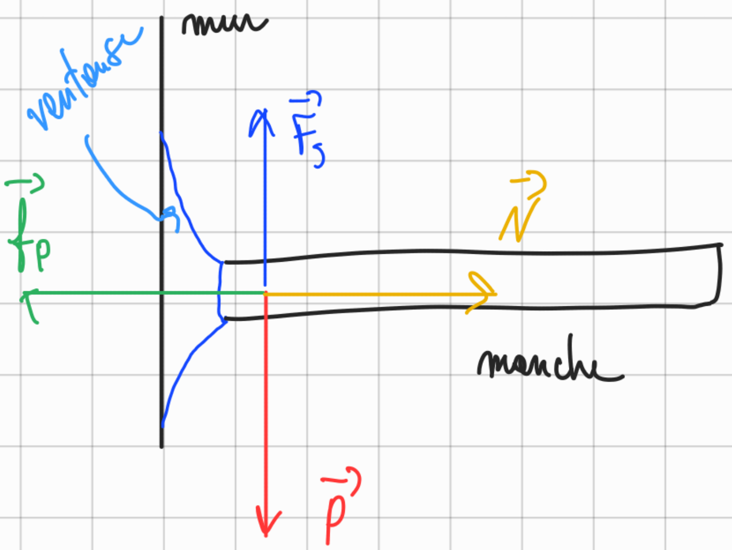
$$p_1 = \frac{F_1}{S_1} \qquad p_2 = \frac{F_2}{S_2}$$

Loi de Pascal $\Rightarrow p_1 = p_2$ (même hauteur!)

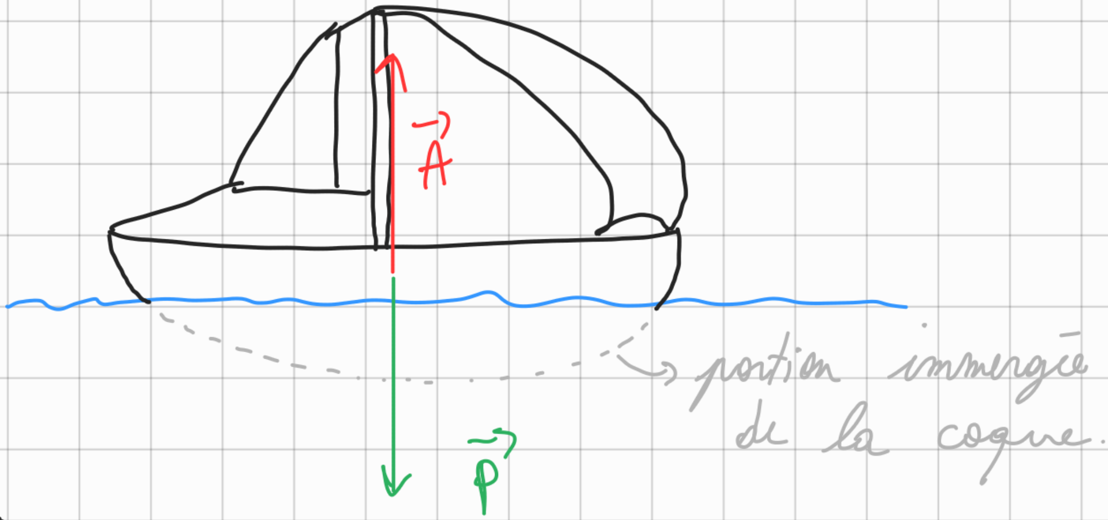
$$\Rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

3. Ventouse



C. La force d'Archimède



$\vec{A}$: force d'Archimède.

$\vec{A} = -\rho_0 V_i \vec{g}$ (modèle).

où ρ_0 : masse volumique de l'eau

$\vec{g}$: vect. d'accél. grav.

V_i : Volume Immergé du bateau

Condition de flottaison :

Si $\|\vec{P}\|$ augmente, $\|\vec{A}\|$ augmente si le V_i peut augmenter.

On veut donc $A = P$ (équilibre),

et donc

$$\rho_0 V_i g = Mg$$

où $M =$ masse du bateau.

Si on note V le volume total du bateau, on doit avoir

$$V_i \leq V$$

Or $V_i = \dfrac{M}{\rho_0}$, donc on veut

$$\frac{M}{\rho_0} \leq V$$

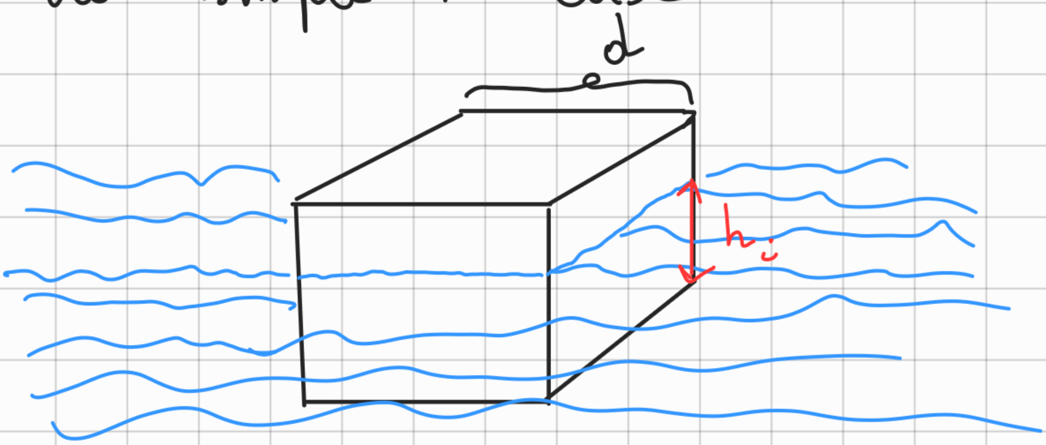
$$\iff \quad \frac{M}{V} \leq \rho_0$$

Question : d'où vient la formule pour $\vec{A}$?

$\Rightarrow$ Force de pression !

Démontrons ceci dans un cas

très simple : cube.



h_i = hauteur immergée du cube.

$V_i = d^2 h_i \Rightarrow A = \rho_0 d^2 h_i g$.

Comment retrouver cette formule à partir de la loi de Pascal ?

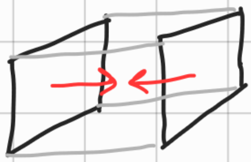
$\vec{F}$ = force totale dûe à la pression.

$= \vec{F}_{\text{faces latérales}} + \vec{F}_{\text{faces horizontales}}$

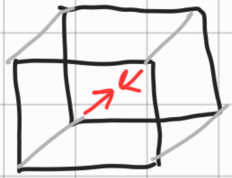
$\vec{F}_{\text{faces latérales}} = \vec{F}_{\text{face gauche + droite}} + \vec{F}_{\text{faces avant + arrière}}$

$\vec{F}_{\text{faces horizontales}} = \boxed{\vec{F}_{\text{face immergée}}} + \boxed{\vec{F}_{\text{face émergée}}}$

$\vec{F}_{\text{faces g. + d.}}$:



$= \vec{0}$.

$\vec{F}_{\text{faces av.+arr.}}$:  $= \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{F}_{\text{faces latérales}} = \vec{0}$

$$F_{\text{face émergée}} = P_{atm}\, d^2$$

$$F_{\text{face immergée}} = P_{fond}\, d^2$$

$$P_{fond} = P_{atm} + \rho_0 g h_i$$

Bilan des forces de pression :

$$F_{\text{face immergée}} - F_{\text{face émergée}}$$

$$= (\cancel{P_{atm}} + \rho_0 g h_i)\, d^2 - \cancel{P_{atm}}\, d^2$$

$$= \rho_0 g d^2 h_i = A \,.$$ OK !

Remarque sur le cas général :

On peut démontrer la formule pour $\vec{A}$ à partir de la loi de Pascal pour n'importe quelle forme.

Ceci nécessite des outils mathématiques qui dépassent le cadre du cours.