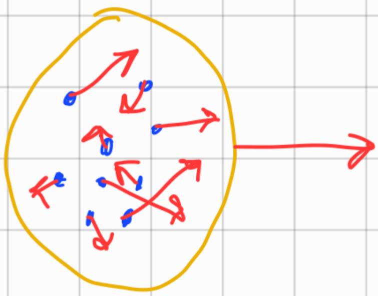
(4/12/2023)

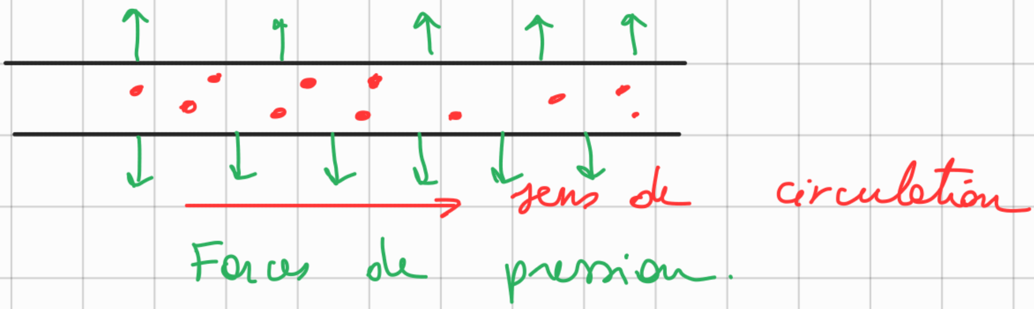
2. Hydrodynamique

A. Débit

Idée : les particules de fluide ne sont plus au repos.



vitesse globale non-nulle.



$\underbrace{\text{Mouvement global}}_{\text{hydrodynamique}} + \underbrace{\text{mvt microscopique}}_{\text{responsable des forces pression.}}$

Q : Relation entre vitesse et pression ?

Définition : pour un écoulement d'un volume ΔV sur un temps Δt, le débit Q est donné par

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$[Q] = L^3 T^{-1}$ SI: m^3/s

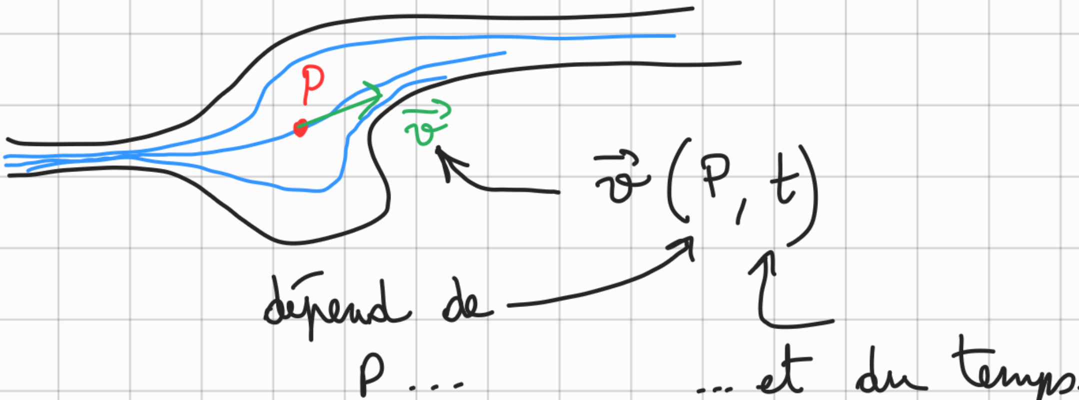
Exemples de valeurs numériques :

1. Débit cardiaque : $\sim 5\,L/min$.
2. LCR $\sim 0{,}5\,L/jour$
3. Respiration $\sim 12\,L/min$
4. Chutes du Niagara $\sim 2800\,m^3/s$

Q : Relation entre vitesse du fluide et le débit ?

→ va dépendre des propriétés géométriques de l'écoulement (cf. plus bas).

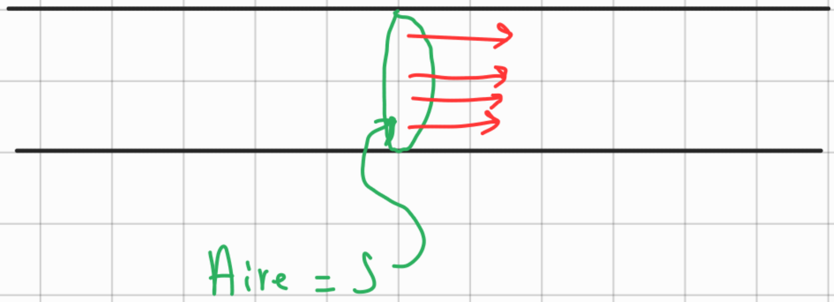
Remarque : dans un fluide en mouvement, la vitesse dépend du point considéré.



Propriété : pour une section d'aire S telle que la vitesse $\vec{v}(P,t)$ est perpendiculaire à S et constante sur S, alors

$$Q = vS.$$

$(v = \|\vec{v}\|)$.



Remarque : $[vS] = \frac{L}{T} L^2 = L^3 T^{-1} = [Q]$

Démonstration :

Si on attend une durée Δt, le fluide se déplace de $\Delta l = v \Delta t$:

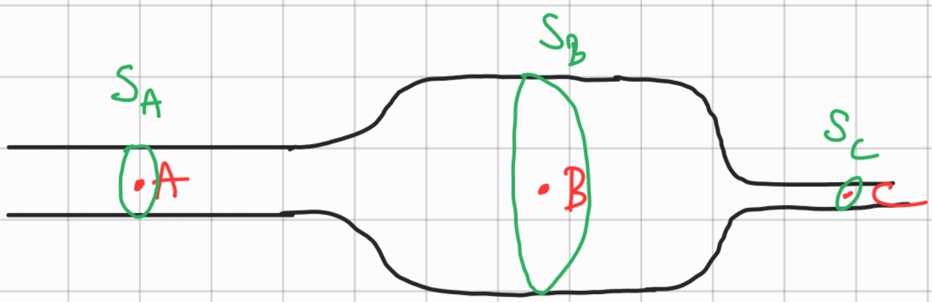
Quel est le volume ΔV déplacé ?

$\Rightarrow \Delta V = S \Delta l$

$$\Rightarrow Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S \Delta l}{\Delta t} = S\left(\frac{\Delta l}{\Delta t}\right) = vS.$$

Conséquence : si le débit est constant dans l'écoulement, alors vS est constant.

Donc, en particulier, si S augmente, alors v diminue (et vice-versa).



$Q_A = Q_B = Q_C = Q$ débit de l'écoulement.

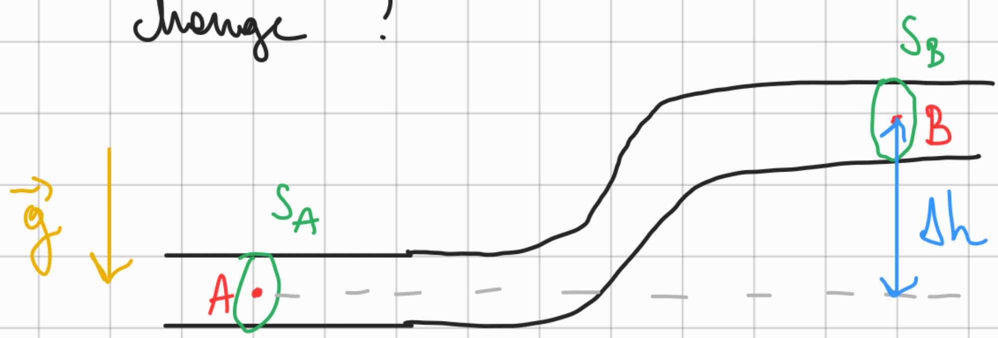
$\Rightarrow \quad v_A S_A = v_B S_B = v_C S_C$

$S_A < S_B \Rightarrow v_A > v_B$

$S_B > S_C \Rightarrow v_B < v_C$

Paradoxe n°1 : les particules de fluide accélèrent "toutes seules" !

Q : que se passe-t-il si la section ne change pas, mais la hauteur change ?



On suppose $S_A = S_B$. Alors $v_A = v_B$.

$h_B - h_A = \Delta h \neq 0.$

Paradoxe n°2 : la particule de fluide va de A à B sans perdre d'énergie cinétique et en même temps en gagnant de l'énergie potentielle grav. !

Ces 2 paradoxes semblent indiquer que les forces de pression doivent être comprises dans cette discussion.

En particulier, on s'attend à avoir des

variations de pression lorsqu'il y a une variation de vitesse ou des variations de hauteur.

B. Le théorème de Bernoulli

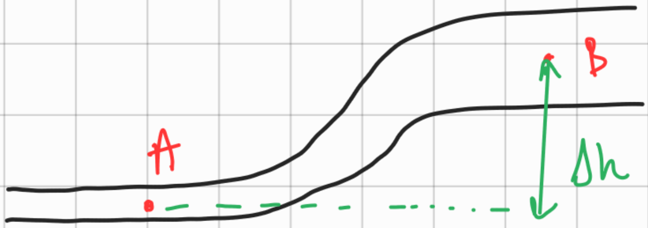
Pour un fluide incompressible, de masse volumique ρ, parfait (= non-visqueux) et dont l'écoulement est non-turbulent, stationnaire $(\vec{v}(P, \cancel{t}))$ et tel que le débit est conservé, on a :

$$e = \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \vec{g} \cdot \vec{OP} + p$$

est conservé dans l'écoulement. Ici :

* $v = \|\vec{v}(P)\|$

* p = Pression au point P.

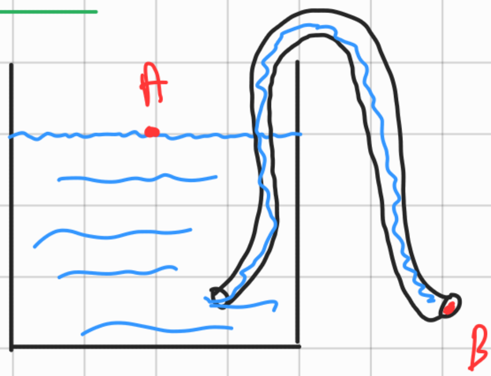


$$e_A = e_B$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v_A^2 - \rho \vec{g}\cdot\overrightarrow{OA} + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \rho\vec{g}\cdot\overrightarrow{OB} + p_B}$$

C. Applications

1. Siphon.



La vitesse en A est typiquement très faible (ex. : piscine) : $v_A \simeq 0$

$p_A = p_{atm}$ $\qquad$ $p_B = p_{atm}$

Thm de B. $\Rightarrow \underbrace{-\rho\vec{g}\cdot\overrightarrow{OA} + \cancel{p_{atm}}}_{e_A} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho v_B^2 - \rho\vec{g}\cdot\overrightarrow{OB} + \cancel{p_{atm}}}_{e_B}$

$$\Rightarrow v_B^2 = 2\left(\vec{g}\cdot\overrightarrow{OB} - \vec{g}\cdot\overrightarrow{OA}\right)$$

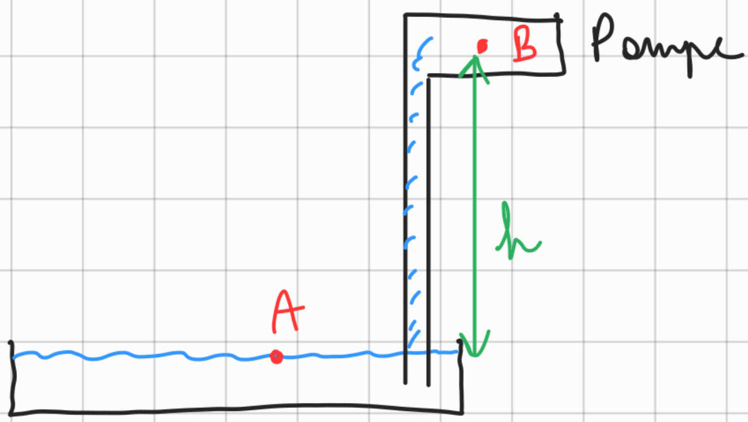
$$= 2\,\vec{g}\cdot\left(\vec{OB} - \vec{OA}\right)$$

$$= 2\,\vec{g}\cdot\left(-\vec{BO} - \vec{OA}\right)$$

$$= 2\,\vec{g}\cdot\left(-\vec{BA}\right) = 2g\,\Delta h$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2g\,\Delta h}$$

2. Pompe à eau



$p_A = p_{atm}$ $\qquad$ $p_B < p_{atm}$

$v_A \simeq 0$

$$\Rightarrow \quad \cdots \Rightarrow \quad p_B = p_{atm} - \rho g h - \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

Pression $p_B > 0$.

$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad p_B < \underbrace{p_{atm} - \rho g h}_{>0}$$

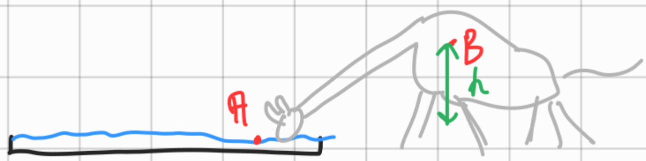
$$\Rightarrow \quad p_{atm} > \rho g h$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h < \frac{p_{atm}}{\rho g}}$$

Limite à la hauteur de pompage.

hauteur max (eau, à 1 atm) : 10 m.

Giraffe :



La pression en B serait beaucoup trop ~~faible~~ forte pour permettre un écoulement.