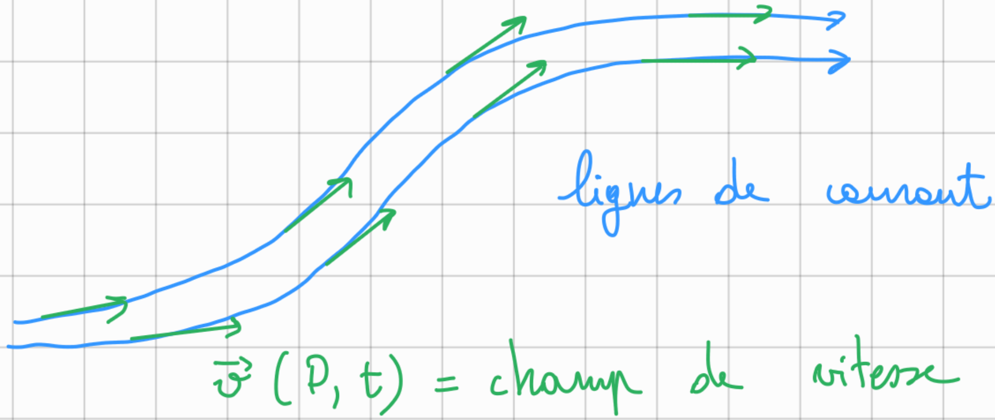
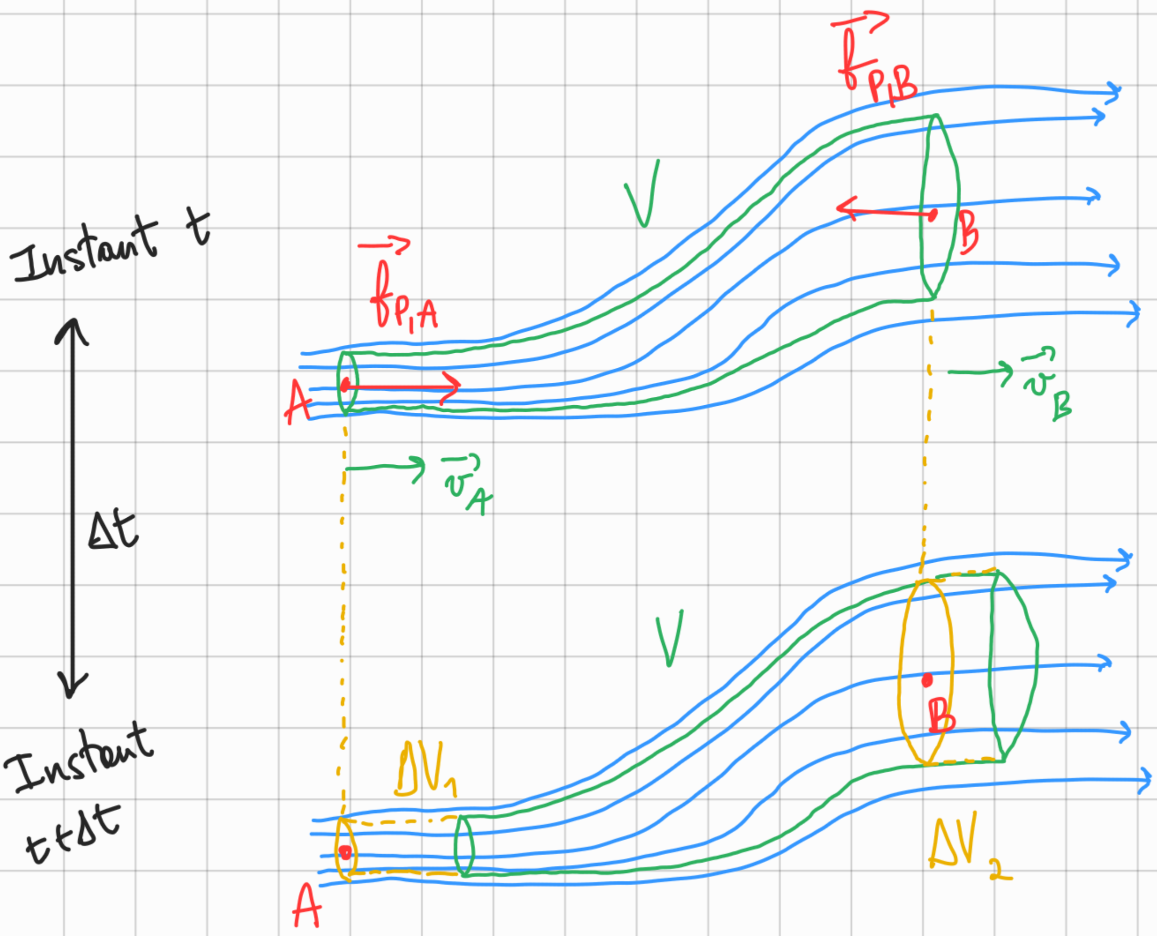
(06/12/2023)

Démonstration du théorème de Bernoulli



Ligne de courant : tangent en tout point au champ de vitesse.



$\Delta V_1 = \Delta V_2$ par incompressibilité. (ΔV)

Par l'hypothèse de stationnarité, les lignes de courant en t et $t+\Delta t$ sont les mêmes : $\vec{v}(P, \cancel{t})$.

Tube de courant : contient un nombre fixé de lignes de courant.

$\Rightarrow$ écoulement non-turbulent.

(Terminologie : "écoulement laminaire").

E_V = énergie mécanique totale du tube de courant.

$E_V(t) \rightarrow$ à l'instant t

$E_V(t+\Delta t) \rightarrow$ à l'instant $t+\Delta t$

$E_V(t+\Delta t) - E_V(t)$ = variation d'énergie totale du tube de courant.

$= E_{\Delta V}(t+\Delta t) - E_{\Delta V}(t)$

où $E_{\Delta V}$ = énergie totale du fluide occupant le volume ΔV.

$$E_{\Delta V}(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\underbrace{(\rho\Delta V)}_{m} v_A^2}_{E_c} - \underbrace{(\rho\Delta V)\vec{g}\cdot\vec{OA}}_{E_p} \qquad (**)$$

$$E_{\Delta V}(t+\Delta t) = \frac{1}{2}(\rho\Delta V)v_B^2 - (\rho\Delta V)\vec{g}\cdot\vec{OB} \qquad (***)$$

$$E_V(t+\Delta t) - E_V(t) = W$$

W = travail des forces autres que le poids.

Hypothèse : fluide "parfait" (non-visqueux).

$\Rightarrow$ W = travail des forces de pression !

$$W = \mathcal{P}\Delta t$$

où $\mathcal{P}$ est la puissance totale des forces de pression :

$$\mathcal{P} = \vec{v}_A\cdot\vec{f}_{P,A} + \vec{v}_B\cdot\vec{f}_{P,B}$$

$$= \underbrace{v_A f_{P,A}}_{\text{car } \vec{v}_A \text{ et } \vec{f}_{P,A} \text{ sont parallèles}} - \underbrace{v_B f_{P,B}}_{\text{car } \vec{v}_B \text{ et } \vec{f}_{P,B} \text{ sont anti-parallèles}}$$

$\longrightarrow \vec{f}_{P,A}$ $\qquad$ $\vec{f}_{P,B} \longleftarrow$

$\longrightarrow \vec{v}_A$ $\qquad$ $\longrightarrow \vec{v}_B$

$$f_{P,A} = S_A p_A \qquad\qquad f_{P,B} = S_B p_B$$

$$\Rightarrow W = \left(v_A S_A p_A - v_B S_B p_B \right) \Delta t$$

$$= \left(Q_A p_A - Q_B p_B \right) \Delta t$$

$$= \Delta V \, p_A - \Delta V \, p_B \qquad (*)$$

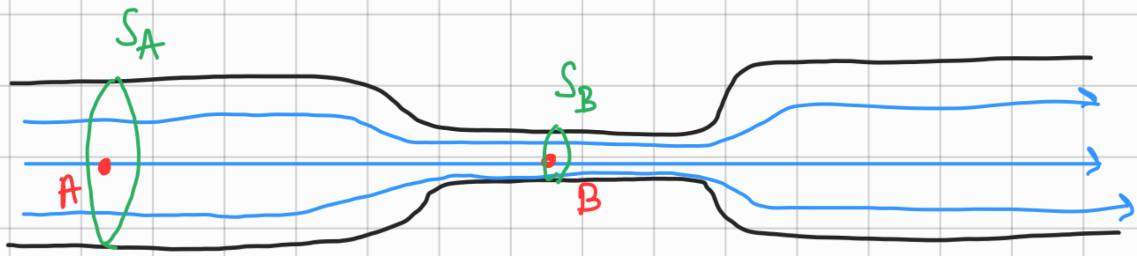
En combinant $(*)$, $(**)$, $(***)$, on trouve :

$$\underbrace{\frac{1}{2} \rho v_A^2 - \rho \vec{g} \cdot \vec{OA} + p_A}_{e_A} = \underbrace{\frac{1}{2} \rho v_B^2 - \rho \vec{g} \cdot \vec{OB} + p_B}_{e_B} .$$

$\Rightarrow$ la quantité $e = \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \vec{g} \cdot \vec{OP} + p$ est conservée le long des lignes de courant.

C. Applications (suite)

3. Effet Venturi



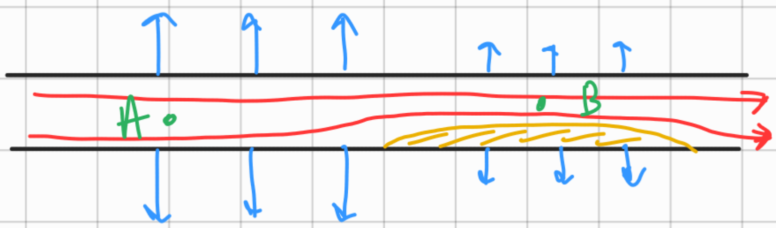
Conservation du débit $\Rightarrow$ $v_A S_A = v_B S_B$

$S_B < S_A \Rightarrow v_B > v_A$.

Thm de Bernoulli avec A et B à même hauteur implique

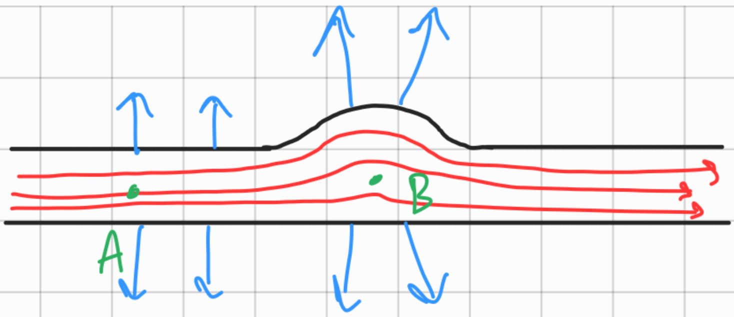
$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + p_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + p_B$$

Comme $v_B > v_A$, $p_A > p_B$.



$p_B < p_A$

$\Rightarrow$ risque de réduction complète du diamètre du vaisseau.



$P_B > P_A$

$$[e] = \frac{E}{V}$$