Examen Janvier 2022 - MD

Question 1 - 12pt

1). $T = 24h = (24 \times 60 \times 60)s = 86400\,s$

2). $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Application Numérique (A.N.) :

$$\omega = \frac{2\pi}{86400s} = 7,27 \times 10^{-5}\ rad/s.$$

3). $v = \omega R_{Terre}$

A.N. : $v = (7,27 \times 10^{-5}\ rad/s)(6400\ km)$

$= (7,27 \times 6,4)\, 10^{-5} \times 10^{6}\ m/s$

$\Rightarrow v = 465,28\ m/s$

4). $p = mv$

A.N. : $p = (80\,kg)(465,28\,m/s)$

$= 37222,4\ kg\, m/s$

5). $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

A.N. : $E_c = 8{,}659419136 \times 10^6 \text{ J}$

6). Pôle Nord => immobile => $v = 0$

7). $R = R_{Terre} \cos\alpha$

$v = \omega R = \omega R_T \cos\alpha$

A.N. : $v = 293{,}881 \cdots \text{ m/s}$

Examen Janvier 2022 - MD

Question 2 - 13 pt

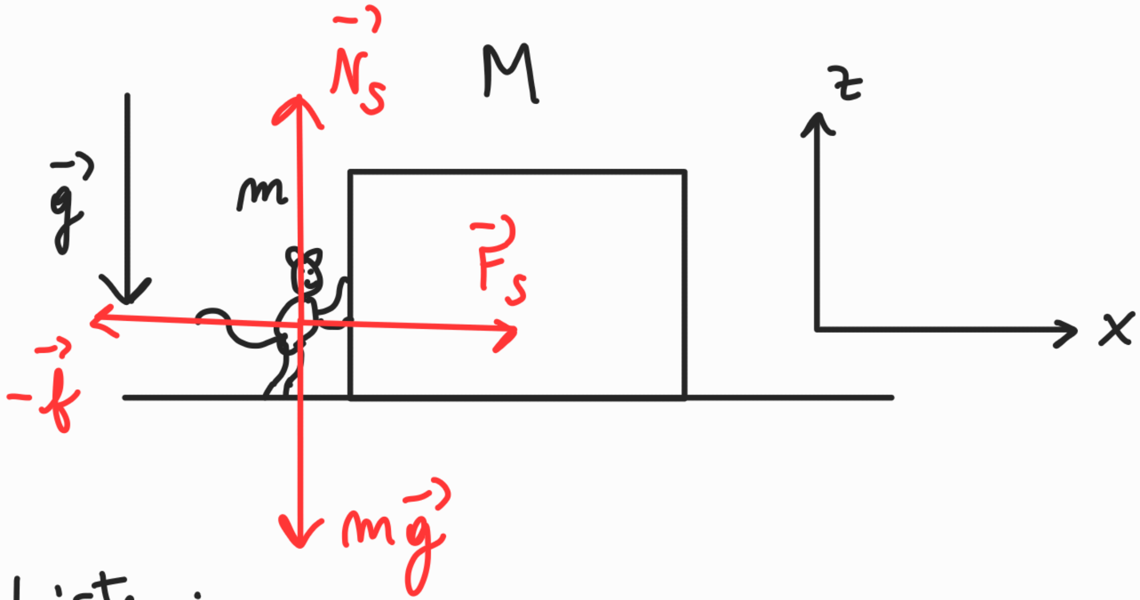
1). Liste :

Poids : $m\vec{g}$

Force normale du sol : $\vec{N}_s$

Force de frottements : $\vec{F}_s$

Force exercée par le bloc : $-\vec{f}$



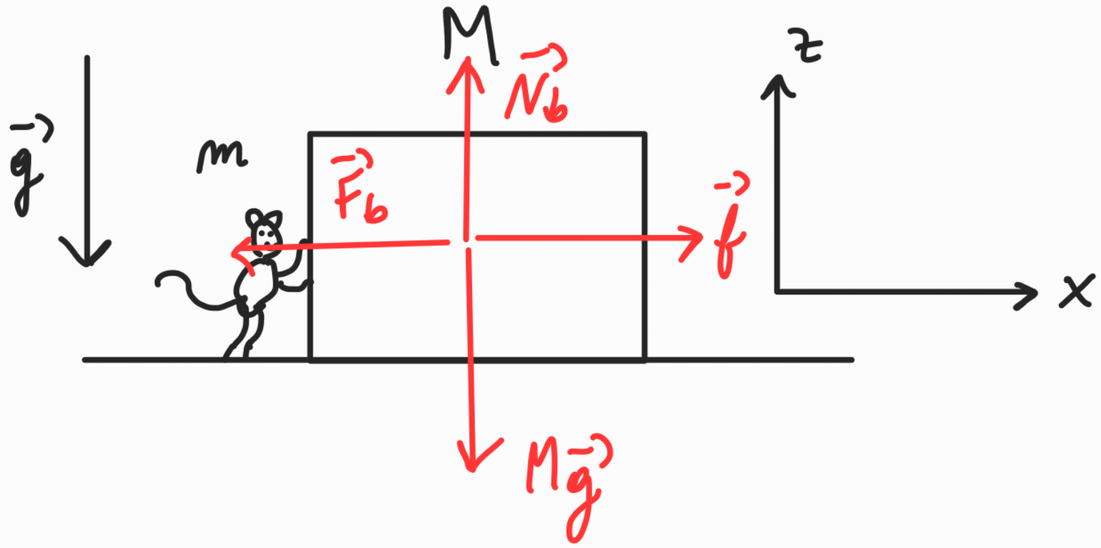
2). Liste :

Poids : $M\vec{g}$

Force normale du sol : $\vec{N}_b$

Force de frottements : $\vec{F}_b$

Force exercée par le bloc : $+\vec{f}$



3). $\vec{F} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \vec{0}$

où $\vec{F}$ = somme des forces agissant sur le singe.

Décomposition :

$$m\vec{g} = (0, -mg)$$

$$\vec{N_s} = (0, N_s)$$

$$-\vec{f} = (-f, 0)$$

$$\vec{F_s} = (+F_s, 0)$$

Calcul : $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_s} - \vec{f} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{N_s} = -m\vec{g} \\ \vec{F_s} = +\vec{f} \end{cases}$$

A.N. : $\begin{cases} N = 300\,N \\ F_s = 15\,N \end{cases}$

4). $M\vec{g} = (0, -Mg)$ $\quad \vec{f} = (f, 0)$

$\vec{N_b} = (0, N_b)$ $\quad \vec{F_b} = (-F_b, 0)$

$$M\vec{g} + \vec{N_b} + \vec{f} + \vec{F_b} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{N_b} = -M\vec{g} \\ \vec{F_b} = -\vec{f} \end{cases}$$

5). Il n'y a pas de glissade tant que toutes les forces de frottement statique sont inférieures à leur valeur critique :

$\mu_s N_s$ pour le singe

$\mu_b N_b$ pour le bloc

$\mu_s N_s = \mu_s mg = 30N$ $\quad F_s = f \leq 30N$

$\mu_b N_b = \mu_b Mg = 20N$ $\quad F_b = f \leq 20N$

$\Rightarrow$ lorsque f augmente, on atteint d'abord la limite sur F_b, donc le bloc se met à glisser avant le singe.

Examen Janvier 2022 - MD

Question 3 - 16 pt

1). $\vec{g} = (0, 0, -g)$

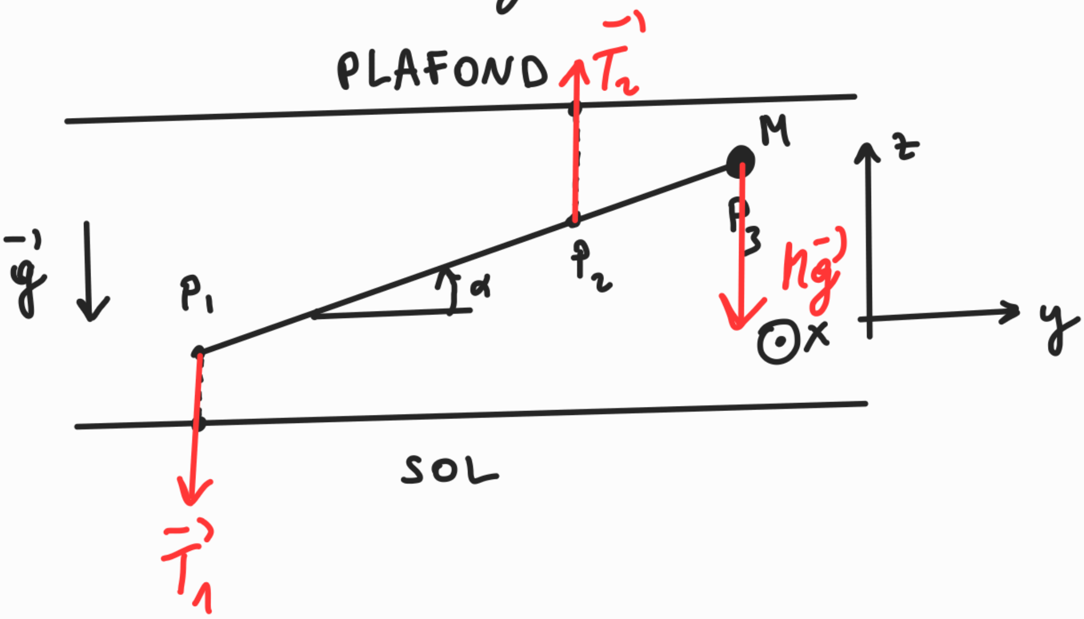
Application numérique : $\vec{g} = (0, 0, -10\,m/s^2)$

2). Liste :

Force de la corde 1 sur la tige : $\vec{T_1}$

——— 2 ——— : $\vec{T_2}$

Poids de M : $M\vec{g}$



3). $\vec{F} = M\vec{a} \Rightarrow \vec{F}$ (force totale) $= \vec{0}$ car le système est immobile.

On a :

$$\vec{T}_1 = (0, 0, -T_1)$$

$$\vec{T}_2 = (0, 0, T_2)$$

$$M\vec{g} = (0, 0, -Mg)$$

Donc

$$-T_1 + T_2 - Mg = 0$$

$$\Rightarrow T_1 = T_2 - Mg$$

4). $\vec{\tau}_{P_1}(\vec{T}_1) = \vec{0}$ car $\vec{T}_1$ s'applique en P_1.

$$\vec{\tau}_{P_1}(\vec{T}_2) = \overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{T}_2 \quad \odot$$

$$\vec{\tau}_{P_1}(M\vec{g}) = \overrightarrow{P_1P_3} \times (M\vec{g}) \quad \otimes$$

Normes :

$$\tau_{P_1}(\vec{T}_2) = L\, T_2 \cos\alpha$$

$$\tau_{P_1}(M\vec{g}) = (L+\ell)\, Mg \cos\alpha$$

5). Système immobile $\Rightarrow$ somme des moments de force doit être nulle.

Donc :

$$L T_2 \cos\alpha = (L+l) Mg \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad T_2 = \left(1+\frac{l}{L}\right) Mg$$

$$T_1 = T_2 - Mg = \frac{l}{L} Mg$$

A.N. : $l/L = \frac{1}{2}$ $\quad M = 1\,kg$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_2 = \frac{3}{2}\, 10\ N = 15\ N \\ T_1 = \frac{1}{2}\, 10 N = 5 N \end{cases}$$

6). Vaut zéro car système immobile !

7). $\vec{T_2} = T_2 \,(0, \sin\beta, \cos\beta)$

$\vec{T_1} = (0, 0, -T_1)$

$M\vec{g} = (0, 0, -Mg)$

$\vec{T_1} + \vec{T_2} + M\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow T_2 \sin\beta = 0$

On doit de plus avoir $\cos\beta\, T_2 = T_1 + Mg$, donc $\cos\beta > 0 \Rightarrow \beta = 0$

8). On a montré que

$$\begin{cases} T_1 = \frac{l}{L} Mg \\ T_2 = \left(1 + \frac{l}{L}\right) Mg \end{cases}$$

Donc $T_2 > T_1$ et si M augmente, la corde 2 va se briser avant la corde 1.

Valeur ?

$$T_2 = T_c = \left(1 + \frac{l}{L}\right) Mg$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{T_c}{g(1 + l/L)} = \frac{20 N}{10 m/s^2 (3/2)} = \frac{4}{3} kg$$

$$= 1,3 \; kg$$

Examen Janvier 2022 - MD

Question 4 - 11 pt

1). $Q = Av$

où A = section de la seringue.

Or $A = \pi R^2$, donc $Q = \pi R^2 v$.

A.N. :

$$Q = 2{,}827 \times 10^{-6} \, m^3/s$$

2). $\Delta t = \dfrac{V}{Q}$

où V = volume de la seringue.

$V = \pi R^2 L \Rightarrow \Delta t = \dfrac{\pi R^2 L}{\pi R^2 v} = L/v$.

A.N. : $\Delta t = \dfrac{10 cm}{0{,}1 \, cm/s} = 100 s$.

3). Le fluide est incompressible, donc la vitesse dans la seringue doit être celle du piston

$$\rightarrow v_A = v = 0{,}1 \, cm/s.$$

4). Conservation du débit implique

$$Q_A = Q_B.$$

Or :

$$Q_A = \pi R^2 v \qquad Q_B = \pi r^2 v_B$$

$$\Rightarrow v_B = \frac{R^2}{r^2} v$$

A.N. : $v_B = \left(\frac{3}{0.6}\right)^2 0{,}1 \text{ cm/s} = 2{,}5 \text{ cm/s}.$

5). Idem, $Q_B = Q_C$. Or le rayon n'a pas changé, donc $v_C = v_B$.

6). Bernoulli :

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + p_B$$

Or $h_A = h_B$ donc

$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\rho\left(\frac{R^4}{r^4} - 1\right)v^2$$

A.N. : $p_A - p_B = 0{,}312$ Pa

7). Idem, cette fois avec $v_B = v_C$:

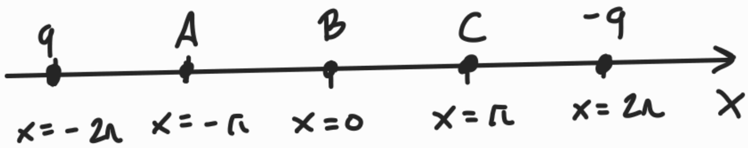
$$p_B - p_C = \rho g (h_C - h_B)$$

A.N. : $p_B - p_C = -5000$ Pa

Examen Janvier 2022 - MD - Points

Question 5

1) • Champ électrique sur axe x horizontal défini ci-contre



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(x+2r)^2} + \frac{+q}{(x-2r)^2}\right]\hat{x}$$

où $\hat{x}$ pointe vers la droite

Charge nécessaire pour atteindre $E_c = 3\ 10^5$ V/m :

$$q = 4\pi\varepsilon_0 E_c\left[\frac{1}{(x+2r)^2} + \frac{1}{(x-2r)^2}\right]^{-1}$$

• Applications numériques :

En A : $x = -r \Rightarrow q_A = \overbrace{4\pi\varepsilon_0 r^2 E_c}^{3.32\ mC\ =}(1+1/9)^{-1}$

$= 3.0\ mC$

En B : $x = 0 \Rightarrow q_B = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E_c \cdot \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^{-1}$

$= 6.6\ mC$

En C : $x = r \Rightarrow q_C = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E_c\,(1/9+1)^{-1}$

$= 3.0\ mC$

(Réponse alternative : $q_C = q_A$ par symétrie)

2) • Quand le Wimshurst se charge, q augmente et atteint $q_A = q_C$ avant q_B

$\Rightarrow$ formation de l'éclair démarre en A et C

• $q = q_A = q_C = 3\,nC$

3) • $V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 3r} = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0 r}$

• $V_C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{-q}{6\pi\varepsilon_0 r}$

(Réponse alternative : $V_C = -V_A$ par symétrie)

• $\Delta V = V_A - V_C = 2V_A = \frac{q}{3\pi\varepsilon_0 r}$

$= 3617\ V$ quand $q = 3\ 10^{-9}\,C$

4) • L'électron arrivera sur la sphère positive (en A) par attraction de la sphère positive et répulsion de la sphère négative

• $\frac{1}{2} m v_A^2 - eV_A = \frac{1}{2} m v_C^2 - eV_C$

0 car vitesse initiale au départ (en C) nulle

$v_A = \sqrt{\frac{2e\,\Delta V}{m}}$

$= 85\ m/s$

5) Parce que la force électrique est conservative
⇒ la vitesse acquise ne dépend pas de la trajectoire
(Alternative acceptable : Parce que la vitesse finale ne dépend que de la différence de potentiel.)

Examen Janvier 2022 - MD - Points

Question 6

1) $\cdot\, R_s I_s = R_i I_i$

$\cdot\, \dfrac{I_i}{I_s} = \dfrac{R_s}{R_i} = 50$

2) $\cdot\, I_{1\text{-}cell} = 10\,pA$

$\hookrightarrow I_s = N \cdot I_{1\text{-}cell} = 0.12\,mA$

$\cdot\, I_d = I_s + I_i$

$= \left(1 + \dfrac{R_s}{R_i}\right) N\, I_{1\text{-}cell}$

$= 6{,}1\ mA$

(Alternative aux 2 dernières étapes

$\cdot\, I_i = \dfrac{R_s}{R_i} I_s = 6\,mA$

$\cdot\, I_d = I_s + I_i = 6{,}1\,mA$)

3) $\cdot$ Résistance totale du coeur

$R = 2R_m + \left(\dfrac{1}{R_s} + \dfrac{1}{R_i}\right)^{-1}$

$= 89\,\Omega$

$\cdot\, \mathcal{E}_d = R\, I_d = 0{,}54\,V$

4) $P = \mathcal{E}_d I_d$

(Alternatives $R I_d^2$ ou $\mathcal{E}_d^2/R$ ok)

$= 3.3\,mW$

5) $\cdot\, R_s \propto L/S$ et $R_i \propto L/S$, où $S = \pi D^2$.

$\cdot$ Bien que les valeurs de R_s et R_i changent avec L et D, le rapport R_s/R_i ne dépend pas de L ou S

$\Rightarrow$ réponse identique : $I_i/I_s = 50$

Alternative possible :

- Coeur humain : $L = 9\,cm$, $D = 8\,cm$

$$\sigma_s = \frac{L}{\pi D^2 R_s} = 1,8\ 10^{-3}/\Omega m$$

$$\sigma_i = \frac{L}{\pi D^2 R_i} = 89,5\ 10^{-3}/\Omega m$$

- Coeur baleine : $L = 1,5\,m$, $D = 1,2\,m$

mêmes tissus $\Rightarrow \sigma_s, \sigma_i$ identiques

$$R_s = \frac{L}{\pi D^2 \sigma_s} = 185,2\ \Omega$$

$$R_i = \frac{L}{\pi D^2 \sigma_i} = 3,7\ \Omega$$

- $I_i / I_s = R_s / R_i = 50$