Examen Août 2023 - MD

Q1 1. $\vec{g} = (0, -g)$ $\qquad g = 10\ m/s^2$

2. $\vec{v_1} = v_1(-\cos\theta_1, \sin\theta_1)$

$\vec{v}_2 = v_2(-\cos\theta_2, \sin\theta_2)$

3. $$\begin{cases} x_1(t) = -v_1\cos\theta_1\, t \\ z_1(t) = v_1\sin\theta_1\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = L - v_2\cos\theta_2\, t \\ z_2(t) = v_2\sin\theta_2\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

4. On veut, en $t = t_c = 3.2\ s$:

$$\begin{cases} x_1(t_c) = -d \\ z_1(t_c) = 0 \end{cases}$$

Donc $$\begin{cases} v_1\cos\theta_1 = \dfrac{d}{t_c} \\ v_1\sin\theta_1 = \frac{1}{2}g\,t_c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan\theta_1 = \dfrac{\frac{1}{2} g t_c}{d/t_c} = \dfrac{1}{2} g \dfrac{t_c^2}{d} \\ v_1 = \sqrt{\left(\dfrac{d}{t_c}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} g t_c\right)^2} \end{cases}$$

A.N. : $d = 7m \qquad L = 4m \qquad t_c = 3.2\ s$

$g = 10\ m/s^2$

$\tan\theta_1 = 7.314 \Rightarrow \theta_1 = 82.2°$

$v_1 = \sqrt{4.79\ m^2/s^2 + 256\ m^2/s^2} = 16.1\ m/s$

5. $\begin{cases} x_2(t_c) = -d \\ z_2(t_c) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} L - v_2\cos\theta_2\, t_c = -d \\ v_2\sin\theta_2\, t_c - \frac{1}{2} g t_c^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2\cos\theta_2 = \dfrac{L+d}{t_c} \\ v_2\sin\theta_2 = \frac{1}{2} g t_c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\theta_2 = \frac{1}{2} g \frac{t_c^2}{L+d}$$

$$v_2 = \sqrt{\left(\frac{L+d}{t_c}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} g t_c\right)^2}$$

A.N. : $d = 7\,m$ $\quad L = 4\,m$ $\quad t_c = 3.2\,s$

$$\theta_2 = 77.9°$$

$$v_2 = \sqrt{11.9\,m^2/s^2 + 256\,m^2/s^2} = 16.4\,m/s$$

Q2 1.

$\vec{P} = m\vec{g}$ (poids)

$\vec{T}$ = tension.

2. $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$ (force totale).

En P, la vitesse est nulle, donc

$\mathcal{P} = 0$ au début du mouvement.

3. $E = E_c + E_p$

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = 0$ (cf. supra)

$E_p = mgH \Rightarrow E = mgH$.

4. (On est maintenant en O).

$\vec{V} = (V, 0)$ avec V tel

que

$E = mgH$.

Or, en O, $E = \frac{1}{2} m V^2 + 0$,

donc $V = \sqrt{2gH}$.

$$\Rightarrow \quad \vec{V} = \left(\sqrt{2gH}\,,\ 0\right)$$

5. On a $\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{V}$ avec

$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$.

Or : $\vec{P} = (0, -P)$ et

$$\vec{T} = (0, T)$$

donc $\vec{P}\cdot\vec{V} = 0$ et $\vec{T}\cdot\vec{V} = 0$.

$\Rightarrow \quad \mathcal{P} = 0$ en O également !

6. (On est en C)

$\vec{V}'$ = vitesse en C.

$$\vec{V}' = (-V', 0)$$

Conservation de l'énergie :

$$E = \frac{1}{2} m V'^2 + mg\left(2(L-d)\right) = mgH$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} V'^2 = g\left(H - 2(L-d)\right)$$

$$\Rightarrow V' = \sqrt{2g\left(H - 2(L-d)\right)}$$

7. Comme $\vec{F} = (0, T+P)$, la force totale en C est purement centripède.

Les formules du MCU s'appliquent donc en C, et en particulier

$$a = V^2/R \quad \text{avec } R = L - d$$

Ainsi, par $\vec{F} = m\vec{a}$, on a

$$m\frac{V^2}{R} = T + P$$

car $\vec{T}$ et $\vec{P}$ pointent vers le bas.

$$\Rightarrow \quad T = m\frac{V'^2}{R} - P = m\left(\frac{V'^2}{R} - g\right)$$

$$= mg\left(\frac{2(H-2R)}{R} - 1\right)$$

$$= \frac{mg}{R}\left(2H - 4R - R\right)$$

$$= mg\left(\frac{2H}{R} - 5\right).$$

$$\Rightarrow \boxed{T = mg\left(\frac{2H}{L-d} - 5\right)}.$$

8. On veut $T \geqslant 0$. Donc

$$2H \geqslant 5(L-d)$$

$$\Rightarrow \boxed{H \geqslant \frac{5}{2}(L-d)}$$

Q3 1. Immobile $\Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$.

$$\vec{F} = \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{N_3} + m\vec{g} + M\vec{g}$$

$$\Rightarrow \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{N_3} = -(m+M)\vec{g}$$

2. $\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_1}) = (dN_1, 0, 0)$

$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_2}) = \vec{0}$

$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_3}) = (0, -LN_3, 0)$

3. $\vec{\tau}_{P_2}(m\vec{g}) = \overrightarrow{P_2C_{G_1}} \times (m\vec{g})$

$$\overrightarrow{P_2C_{G_1}} = \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1C_{G_1}}$$

$$= (0, d, 0) + \left(\frac{3L}{8}, -\frac{d}{2}, \frac{3h}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3L}{8}, \frac{d}{2}, \frac{3h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{P_2C_{G_1}} \times (m\vec{g}) = \left(\frac{3L}{8}, \frac{d}{2}, \frac{3h}{2}\right) \times (0, 0, -mg)$$

$$= \left(-mg\frac{d}{2}, mg\frac{3L}{8}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{P_2}(m\vec{g}) = mg\left(-\frac{d}{2}, \frac{3L}{8}, 0\right)}$$

4. $\vec{\tau}_{P_2}(M\vec{g}) = \overrightarrow{P_2 C_{G_2}} \times (M\vec{g})$

$$= \left(\frac{3L}{4}, \frac{d}{5}, h\right) \times (0, 0, -Mg)$$

$$= Mg\left(-\frac{d}{5}, \frac{3L}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{P_2}(M\vec{g}) = Mg\left(-\frac{d}{5}, \frac{3L}{4}\right)}$$

5. $\vec{\tau}_{P_2} = \vec{0}$

$$\Rightarrow (dN_1, 0, 0) + (0, -LN_3, 0)$$

$$+ mg\left(-\frac{d}{2}, \frac{3L}{8}, 0\right) + Mg\left(-\frac{d}{5}, \frac{3L}{4}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dN_1 - mg\frac{d}{2} - Mg\frac{d}{5} = 0 \\ -LN_3 + mg\frac{3L}{8} + Mg\frac{3L}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_1 = g\left(\frac{m}{2} + \frac{M}{5}\right) \\ N_3 = g\left(\frac{3m}{8} + \frac{3M}{4}\right) = \frac{3}{4}g\left(\frac{m}{2} + M\right) \end{cases}$$

N_2 ?

$$(9.1) \Rightarrow N_2 = (m+M)g - N_1 - N_3$$

$$= g\left[m\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) + M\left(1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right)\right]$$

$$= g\left(\frac{m}{8} + \frac{M}{20}\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{N_1} = \left(0, 0, g\left(\frac{m}{2} + \frac{M}{5}\right)\right) \\ \vec{N_2} = \left(0, 0, \frac{3}{4} g\left(\frac{m}{2} + M\right)\right) \\ \vec{N_3} = \left(0, 0, \frac{1}{4} g\left(\frac{m}{2} + \frac{M}{5}\right)\right) \end{cases}}$$

6. $C_{G_{tot}}$?

$$\overrightarrow{P_2 C_{G_{tot}}} = \frac{1}{m+M}\left(m\,\overrightarrow{P_2 C_{G_1}} + M\,\overrightarrow{P_2 C_{G_2}}\right)$$

$$= \frac{1}{m+M}\left(m\left(\frac{3L}{8}, \frac{d}{2}, \frac{3h}{2}\right) + M\left(\frac{3L}{4}, \frac{d}{5}, h\right)\right)$$

$$= \frac{1}{m+M}\left(L\left(\frac{3m}{8} + \frac{3M}{4}\right), d\left(\frac{m}{2} + \frac{M}{5}\right), h\left(\frac{3m}{2} + M\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{P_2 C_{G_{tot}}} = \frac{1}{m+M}\left(\frac{3L}{4}\left(\frac{m}{2} + M\right), d\left(\frac{m}{2} + \frac{M}{5}\right), h\left(\frac{3m}{2} + M\right)\right)}$$

Q4 1. $Q = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = S\,v$

Seringue : $v = 0.3$ cm/s et $S = \pi R^2$

où $R = 1.7$ cm.

$\Rightarrow Q = 2.7\ \text{cm}^3/\text{s}$

2. Le piston se déplace d'une distance de $L = 10$ cm à la vitesse $v = 0.3$ cm/s.

$\Rightarrow \Delta t = \dfrac{L}{v} = 33.3$ s.

3. Conservation du débit :

$Q = Q_B$

Or $Q_B = v_B S_B$ avec $S_B = \pi r^2$.

$\Rightarrow v_B = \dfrac{Q}{S_B} = \dfrac{R^2}{r^2} v$

A.N. : $v_B = 5.4$ cm/s.

4. $Q_C = Q_B$ et $S_C = S_B \Rightarrow v_C = v_B$.

5. Bernoulli entre A & B :

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + p_B$$

$$h_A = h_B \Rightarrow p_A - p_B = \frac{\rho}{2}\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 29 \ cm^2/s^2 = 29 \times 10^{-4} m^2/s^2$$

$$\rho = 990 \ kg/m^3$$

$$\Rightarrow p_A - p_B = 1.44 \ Pa.$$

6. $\frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + p_B = \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g h_C + p_C$

$$v_B = v_C$$

$$\Rightarrow p_B - p_C = \rho g (h_C - h_B)$$

$$h_C = H = 100 \ cm \qquad h_B = h = 85 \ cm$$

$$\Rightarrow p_B - p_C = 1485 \ Pa$$

7. Pas de circulation dans la colonne

$\Rightarrow$ Loi de Pascal :

$$p_c - p_{atm} = \rho g x$$

$$\Rightarrow p_c = p_{atm} + \rho g x$$

$$\rho g x = 1188 \text{ Pa}$$

$$\Rightarrow p_c = 102513 \text{ Pa}$$

$$\Rightarrow p_B = 1485 \text{ Pa} + 102513 \text{ Pa}$$

$$= 103998 \text{ Pa}$$

$$\Rightarrow p_A = 1.44 \text{ Pa} + 103998 \text{ Pa}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_A = 103999 \text{ Pa}}$$