MD - Correctif Examen Juin 2023

Q1.

1. $\vec{g} = (0, -g)$ $\quad g = 10\ m/s^2$

2. $\vec{v_0} = v_0 (\sin\theta, \cos\theta)$

3. $\begin{cases} x_1(t) = v_0 \sin\theta\ t \\ z_1(t) = h_1 + v_0 \cos\theta\ t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_2(t) = L \\ z_2(t) = h_2 - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

5. Collision $\Leftrightarrow$ $x_1(t_c) = x_2(t_c)$ et $z_1(t_c) = z_2(t_c)$.

Donc :

$$\begin{cases} v_0 \sin\theta\ t_c = L \\ h_1 + v_0 \cos\theta\ t_c - \frac{1}{2} g t_c^2 = h_2 - \frac{1}{2} g t_c^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_c = \dfrac{L}{v_0 \sin\theta} \\ t_c = \dfrac{h_2 - h_1}{v_0 \cos\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L}{v_0 \sin\theta} = \frac{h_2 - h_1}{v_0 \cos\theta}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan\theta = \frac{L}{h_2 - h_1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{L}{h_2 - h_1}\right)}$$

6. $z_c = h_2 - \frac{1}{2} g t_c^2 \Leftrightarrow -\frac{2}{g}\left(z_c - h_2\right) = t_c^2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_c = \sqrt{\frac{2}{g}\left(h_2 - z_c\right)}}$$

Avec $z_c = \frac{h_2}{2}$: $\boxed{t_c = \sqrt{\frac{h_2}{g}}}$

v_0 ?

$$v_0^2 = \frac{L^2}{t_c^2} + \frac{(h_2 - h_1)^2}{t_c^2}$$

$$= \frac{g}{h_2}\left(L^2 + (h_2 - h_1)^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{g}{h_2}\left(L^2 + (h_2 - h_1)^2\right)}}$$

Q2

1. $\vec{V}' = V'(-\sin\alpha, -\cos\alpha)$

2. Conservation de l'impulsion :

$$m\vec{v} + M\vec{V} = (m+M)\vec{V}'$$

Or : $\vec{v} = (-v, 0)$ $\quad \vec{V} = (0, -V)$

Donc :

$$\begin{cases} -mv + 0 = (m+M)(-V'\sin\alpha) \\ 0 - MV = (m+M)(-V'\cos\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{mv}{MV} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{mv}{MV}\right)}$$

$$\begin{cases} V'\sin\alpha = \dfrac{m}{M+m} v \\ V'\cos\alpha = \dfrac{M}{M+m} V \end{cases}$$

$$\Rightarrow (V')^2 = \frac{m^2v^2 + M^2V^2}{(m+M)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V' = \sqrt{\frac{m^2v^2 + M^2V^2}{(m+M)^2}}}$$

3. $\Delta E_c = E_c' - E_c$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

$$E_c' = \frac{1}{2} (m+M) V'^2$$

$$\Rightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2} \left[(m+M)V'^2 - mv^2 - MV^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{m^2v^2 + M^2V^2}{m+M} - mv^2 - MV^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\cancel{m^2v^2} + \cancel{M^2V^2} - \cancel{m^2v^2} - mMv^2 - mMV^2 - \cancel{M^2V^2}}{m+M} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} (v^2 + V^2)$$

$$\boxed{\Delta E_c = -\frac{mM}{2} \frac{v^2 + V^2}{m+M}}$$

4. Elastique $\Leftrightarrow \Delta E_c = 0$. Or, pour $V \neq 0$,

$\Delta E_c < 0$ et ne s'annule donc jamais !

Q3

1. Force totale $= \vec{N_1} + \vec{N_2} + M\vec{g} + m\vec{g}$

$= \vec{0}$ car immobile.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{N_1} + \vec{N_2} = -(m+M)\vec{g}}$$

2. Formule du cours :

$$\vec{OC}_{G,tot} = \frac{1}{m+M}\left(M\,\vec{OC}_G + m\,\vec{OP}\right)$$

$$\vec{OC}_G = (0, 0, H)$$

$$\vec{OP} = (0, D\cos\theta, H+h)$$

$$\Rightarrow \vec{OC}_{G,tot} = \frac{1}{m+M}\left(0, mD\cos\theta, (m+M)H\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OC}_{G,tot} = \left(0, \frac{m}{m+M}D\cos\theta, H\right)}$$

3. $\vec{N_1} = (0, 0, N_1)$ $\qquad \vec{N_2} = (0, 0, N_2)$

$$\vec{N_1} + \vec{N_2} = -(m+M)\vec{g} = (0, 0, (m+M)g)$$

$\Rightarrow N_1 + N_2 = (m+M)g$.

2e équation ? $\Rightarrow$ équilibre de rotation :

$$\vec{\tau}_O = \vec{0}.$$

$\hookrightarrow$ moment de force total.

$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_O(\vec{N_1}) + \vec{\tau}_O(\vec{N_2}) + \vec{\tau}_O(M\vec{g}) + \vec{\tau}_O(m\vec{g})$$

$$\vec{\tau}_O(\vec{N_1}) = \vec{OA_1} \times \vec{N_1} = (-dN_1, 0, 0)$$

$$\vec{\tau}_O(N_2) = \vec{OA_2} \times \vec{N_2} = (dN_2, 0, 0)$$

$$\vec{\tau}_O(M\vec{g}) + \vec{\tau}_O(m\vec{g}) = ?$$

Deux façons de faire : avec $\vec{OC_G}$ et $\vec{OP}$ ou directement avec $\vec{OC}_{G,tot}$.

(i) $\vec{\tau}_O(M\vec{g}) = \vec{OC_G} \times (M\vec{g}) = \vec{0}$

(car $\vec{OC_G}$ est parallèle à $\vec{g}$)

$$\vec{\tau}_O(m\vec{g}) = \vec{OP} \times (m\vec{g})$$

$$= (-\|\vec{OP}\| mg \sin\alpha, 0, 0)$$

où α = angle entre $\vec{OP}$ et $\vec{g}$

Or (trigono) $\|\vec{OP}\| \sin\alpha = D\cos\theta$.

Donc

$$\vec{\tau}_O(m\vec{g}) = (-mgD\cos\theta, 0, 0)$$

(ii) $\vec{\tau}_O(m\vec{g}) + \vec{\tau}_O(M\vec{g}) = \vec{OC}_{G,tot} \times ((m+M)\vec{g})$

Deux possibilités : avec la formule de l'aide-mémoire ou non.

a. $\vec{OC}_{G,tot} \times ((m+M)\vec{g})$

$$= \left(\frac{-m}{m+M} D\cos\theta \, (m+M) g, \; 0, 0\right)$$

$$= (-mgD\cos\theta, 0, 0)$$

b. $\vec{OC}_{G,tot} \times ((m+M)\vec{g})$

$$= \left(-\|\vec{OC}_{G,tot}\| (m+M) g \sin\beta, \; 0, 0\right)$$

où β = angle entre $\vec{OC}_{G,tot}$ et $\vec{g}$.

Or (trigono) :

$$\|\overrightarrow{OC}_{G,tot}\| \sin\beta = \text{composante suivant l'axe } y$$

du vecteur $\overrightarrow{OC}_{G,tot}$

$$= \frac{m}{m+M} D\cos\theta$$

Dans tous les cas, on trouve bien

$$\boxed{\vec{\tau}_O(M\vec{g}) + \vec{\tau}_O(m\vec{g}) = (-mgD\cos\theta, 0, 0)}$$

Donc $\vec{\tau}_O = \vec{0}$ implique :

$$-dN_1 + dN_2 - mgD\cos\theta = 0$$

donc $N_2 - N_1 = mg\frac{D}{d}\cos\theta$.

Avec $N_1 + N_2 = (m+M)g$ on a donc

$$N_1 = \frac{1}{2}\left((m+M)g - mg\frac{D}{d}\cos\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(M + m\left(1 - \frac{D\cos\theta}{d}\right)\right)g$$

et

$$N_2 = \frac{1}{2}\left((m+M)g + mg\frac{D}{d}\cos\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(M + m\left(1 + \frac{D\cos\theta}{d}\right)\right)g$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}\left(M + m\left(1 - \frac{D\cos\theta}{d}\right)\right)g \\ N_2 &= \frac{1}{2}\left(M + m\left(1 + \frac{D\cos\theta}{d}\right)\right)g \end{aligned}}$$

4. On doit avoir $N_1 \geq 0$. A la limite, lorsque m atteint m_*, $N_1 = 0$. Donc :

$$M + m_*\left(1 - \frac{D\cos\theta}{d}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m_* = \frac{M}{\frac{D\cos\theta}{d} - 1}}$$

Si $m > m_*$ le système se met à basculer !

5. $M \geqslant m_*$? Remarque : $d < D\cos\theta \Rightarrow m_* > 0$.

$$M \geqslant \frac{M}{\frac{D\cos\theta}{d} - 1} \iff \frac{D\cos\theta}{d} - 1 \geqslant 1$$

$$\iff D\cos\theta \geqslant 2d \iff \boxed{D \geqslant \frac{2d}{\cos\theta}}$$

Q4 $V_1 = 2.3\,m^3$ $V_2 = 3.55\,m^3$

$\rho_1 = 92\,kg\,m^{-3}$ $\rho_2 = 760\,kg\,m^{-3}$

$V_i = 12\%\,V_1$

1. $M_1 = V_1 \rho_1 = 2.3\,m^3\,92\,kg\,m^{-3} = 211{,}6\,kg$

$M_2 = V_2 \rho_2 = 3.55\,m^3\,760\,kg\,m^{-3} = 2698\,kg$

2. Force totale sur bloc 1 $= \vec{0}$ car immobile.

$\Rightarrow M_1 g + T_{corde} = A_1 = \rho_0 V_i g$ (Archimède)

$\Rightarrow T_{corde} = \rho_0 V_i g - M_1 g = \left(\rho_0\, 12\%\, V_1 - \rho_1 V_1\right) g$

$= \left(12\%\,\rho_0 - \rho_1\right) V_1 g$

$= \left(0.12\;1000\,kg\,m^{-3} - 92\,kg\,m^{-3}\right) 2.3\,m^3\;10\,m\,s^{-2}$

$= 644\,N$

3. Force totale sur bloc 2 $= \vec{0}$ car immobile.

$\Rightarrow M_2 g + T_{chaine} = A_2 + T_{corde}$

$\Rightarrow T_{chaine} = A_2 + T_{corde} - M_2 g$

$= \rho_0 V_2 g - M_2 g + T_{corde}$

$$= (\rho_0 - \rho_2) V_2 g + T_{corde}$$

$$(\rho_0 - \rho_2) V_2 g = (1000\,kg\,m^{-3} - 760\,kg\,m^{-3})\, 3.55\,m^3\, 10\,m\,s^{-2}$$

$$= 8520\,N$$

Avec $T_{corde} = 644\,N$, on trouve

$$T_{chaine} = 8520\,N + 644\,N = 9164\,N.$$

[Alternative : $T_{corde} = 500\,N$

$\Rightarrow T_{chaine} = 9020\,N$]

4. $T_{chaine}^{max} = 10\,000\,N$ $\qquad T_{corde}^{max} = 700\,N.$

Cas limite : V_1 complètement immergé ?

$$\Rightarrow T_{corde} = (\rho_0 - \rho_1) V_1 g$$

$$= (1000\,kg\,m^{-3} - 92\,kg\,m^{-3})\, 2.3\,m^3\, 10\,m\,s^{-2}$$

$$= 20\,884\,N > T_{corde}^{max}.$$

$\Rightarrow$ il est impossible d'immerger complètement le bloc 1, mais on ne sait pas encore si c'est la chaîne ou la corde qui se rompt en premier.

Supposons que ça soit la corde et voyons ce qu'on trouve. Si $T_{corde} = T_{corde}^{max}$, alors

$$T_{chaîne} = (\rho_0 - \rho_2) V_2 g + T_{corde}^{max}$$

$$= 8520\,N + 700\,N = 9220\,N < T_{chaîne}^{max}.$$

<u>Donc la corde se brise avant la chaîne!</u>

A quelle valeur de V_i cela se produit-il?

$$T_{corde}^{max} = \rho_0 V_i g - \rho_1 V_1 g$$

$$\Leftrightarrow \rho_0 V_i g = T_{corde}^{max} + \rho_1 V_1 g$$

$$\Leftrightarrow V_i = \frac{T_{corde}^{max}}{\rho_0 g} + \frac{\rho_1}{\rho_0} V_1$$

$$= \frac{700\,N}{1000\,kg\,m^{-3}\,10\,m\,s^{-2}} + \frac{92\,kg\,m^{-3}}{1000\,kg\,m^{-3}}\,2.3\,m^3$$

$$= 0.2816\,m^3 = 12.24\%\,V_1.$$