Université Libre de Bruxelles

Année Académique 2023-2024 — *PHYS-G1102*

Physique appliquée aux sciences de la Vie — *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Médecine et en Sciences Dentaires

Examen

Seconde session - août

Correctif

Nom:

Prénom:

Matricule:

Section:

Q1: /8	Q2: /14	Q3: /10
Q4: /10	Q5: /10	Q6: /10

Instructions: L'usage de documents n'est pas autorisé. L'examen dure 3 heures. Il y a 6 questions. Vous êtes responsables de vérifier que cet examen comporte bien 13 pages. Vous n'êtes pas autorisés à dégraffer les pages de l'examen. Vous êtes autorisés à utiliser une calculatrice (pas de smartphone). Un aide-mémoire vous est fourni à la fin de ce document. Vous pouvez utiliser les résultats du cours théorique sans démonstration, mais pour le reste justifiez bien toutes vos réponses. Les valeurs numériques peuvent être arrondies au 2e chiffre significatif. Sauf indication contraire, tous les résultats numériques doivent être exprimés dans les unités du Système International. Vous pouvez prendre $g = 10m/s^2$ et $\rho_0 = 1000kg/m^3$.
Lorsqu'il vous est demandé de dessiner une force sur un schéma, on demande que la direction et le sens soient le plus précis possible, mais la norme ne doit pas nécessairement être à l'échelle.
Veuillez répondre à chaque question dans l'espace prévu à cet effet après chaque énoncé. S'il vous manque de la place, vous pouvez faire référence au verso d'une des feuilles d'examen pour indiquer où se trouve votre réponse. Veillez à indiquer *très clairement* si vous recourez à ce système. Enfin, le verso des feuilles d'examen peut-être également utilisé comme brouillon pour vos calculs et raisonnements.
Note finale: Le nombre total de points, sur les 6 questions, s'élève à 62 points. Le nombre de points obtenus est rapporté sur 20, et la note de l'examen est alors obtenue en arrondissant à l'entier le plus proche.

Question 1: *(8 points)*

On considère un tir parabolique ayant lieu sur un plan incliné vers le bas d'un angle avec l'horizontale de $\theta = 18°$. La position initiale du projectile est prise pour point de référence du système et pour origine des coordonnées x et z. La vitesse initiale fait un angle $\alpha = 16°$ avec l'horizontale et la norme v_0 de la vitesse initiale est inconnue. Sur le plan incliné, un point P est pris pour cible, à une distance $L = 9m$ de O. Voir figure 1.

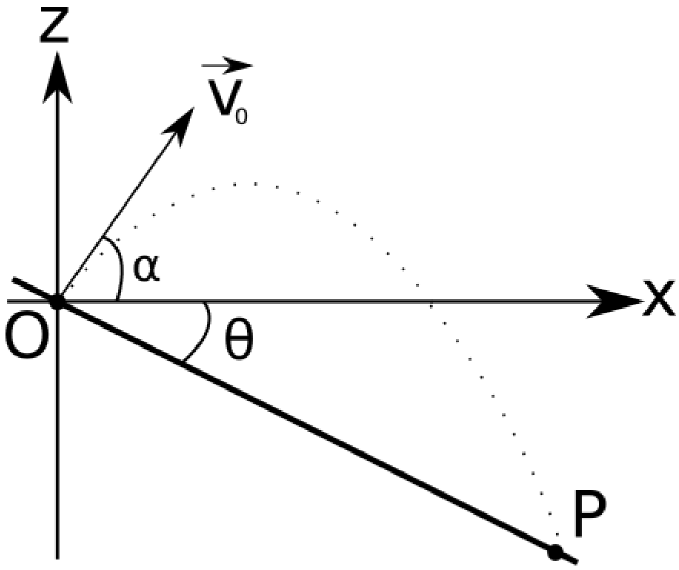


Figure 1: Un projectile est lancé depuis le point O vers la cible, au point P.

On vous demande d'utiliser le système d'axes tel que présenté sur la figure 1. De plus, nous vous conseillons de ne substituer les valeurs numériques pour les angles θ et α qu'à la fin de vos calculs.

1. (1pt) Que valent les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$?

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= L\,(\cos\theta, -\sin\theta)\\ &= (8.56m, -2.78m)\end{aligned}$$

2. (1pt) Que valent les composantes du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ en fonction de l'inconnue v_0?

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= v_0\,(\cos\alpha, \sin\alpha)\\ &= v_0(0.96, 0.27)\end{aligned}$$

3. (1pt) Que valent les composantes du vecteur position $\vec{r}(t)$ du projectile en fonction du temps?

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$ avec $\vec{r}_0 = 0$ et $\vec{g} = (0, -g)$
donc en notant $\vec{r}(t) = (x(t), z(t))$ on trouve

$x(t) = v_0 t \cos\alpha$ et $z(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$

4. (2pt) On note $t_\star$ le temps d'impact avec P. Déterminer les équations que doivent satisfaire le temps d'impact $t_\star$ et la norme de la vitesse initiale v_0.

   Impact signifie $\vec{r}(t_\star) = \overrightarrow{OP}$.
   Donc en décomposant, on trouve les deux équations:

$$v_0 t_\star \cos\alpha = L\cos\theta\,,$$
$$v_0 t_\star \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_\star^2 = -L\sin\theta\,.$$

5. (2pt) Résoudre ces équations et déterminer ainsi $t_\star$ et v_0. Evaluer votre résultat final numériquement.

   La première équation implique
$$t_\star = \frac{L\cos\theta}{v_0\cos\alpha}\,.$$
   En injectant ce résultat dans la seconde équation, on trouve
$$\begin{aligned}
&v_0\sin\alpha\left(\frac{L\cos\theta}{v_0\cos\alpha}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{L\cos\theta}{v_0\cos\alpha}\right)^2 = -L\sin\theta\\
\Leftrightarrow &L\tan\alpha\cos\theta + L\sin\theta = \frac{1}{2v_0^2}g\left(\frac{L\cos\theta}{v_0\cos\alpha}\right)^2\\
\Leftrightarrow &v_0^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{L\cos\theta}{\cos\alpha}\right)^2\frac{1}{L\tan\alpha\cos\theta + L\sin\theta} = \frac{L}{2}g\frac{\cos\theta}{\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha\tan\theta)}\\
\Leftrightarrow &v_0 = \sqrt{\frac{L}{2}g\frac{\cos\theta}{\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha\tan\theta)}}
\end{aligned}$$
   On peut à présent remplacer cela dans l'expression pour $t_\star$ et on obtient (après une petit simplification):
$$t_\star = \sqrt{\frac{2L\cos\theta}{g\cos\alpha}(\sin\theta + \cos\alpha\tan\theta)}$$
   Application numérique:
$$v_0 = 8.7m/s \qquad t_\star 1.02s$$

6. (1pt) Il est clair que si α était inférieur à $-\theta$ dans ce problème, le projectile ne pourrait jamais atteindre le point P, et ce quelque soit la valeur de v_0. Comment ceci est-il traduit mathématiquement dans vos résultats?

   La norme v_0 doit être un nombre réel, nous devons donc avoir $\sin\alpha + \cos\alpha\tan\theta > 0$. Cette condition est équivalente à $\tan\alpha > -\tan\theta$. La fonction tangente étant croissante, cela implique que nous devons avoir $\alpha > -\theta$. En d'autres mots, si nous avions supposé que α étant inférieur à $-\theta$, alors nous aurions trouvé une valeur imaginaire pour v_0, ce qui n'a aucun sens.

Question 2: *(14 points)*

Un humain tient un livre de $m = 1.2kg$ dans la main. Parmi les muscles sollicités dans cette position on trouve le *muscle brachial*, qui s'insère sur l'ulna comme illustré sur la figure 2. Le but de ce problème est d'estimer, dans un modèle simple, la tension dans ce muscle. On néglige dans cette question la masse du muscle brachial, mais pas le poids de l'avant-bras, qui est de $M = 1.7kg$. On modélise l'avant-bras par une tige ridige et le muscle par une corde tendue. Le coude est au point A, l'insertion du muscle est en B, le centre de masse de l'avant-bras est en C et le livre est en D. Le système est immobile.
On suppose que l'insertion du muscle brachial se fait avec un angle de $\theta = 35°$ et que l'avant-bras est incliné de $\alpha = 10°$ vers le bas. On donne les distances suivantes entre les poits:

$$L_1 = ||\overrightarrow{AB}|| = 3cm\,, \quad L_2 = ||\overrightarrow{AC}|| = 17cm\,, \quad L_3 = ||\overrightarrow{AD}|| = 25cm\,.$$

Voir figure 2 pour un récapitulatif du modèle ainsi que le système d'axes à utiliser. On note également $\vec{T}$ la force exercée par le muscle sur le point B. Dans vos réponses, vous pouvez garder les paramètres du problème sans remplacer les valeurs numériques, sauf pour la sous-question 4 où la valeur numérique de T est demandée.

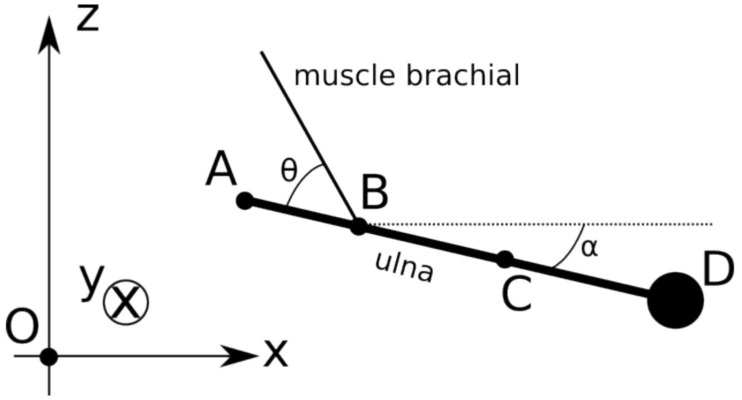


Figure 2: Modèle pour le système constitué de l'avant-bras, du muscle brachial et de la main. Le point C correspond au centre de masse de l'avant-bras.

1. (4pt) Déterminer les moments de force correspondant aux poids de l'avant-bras et du livre, par rapport au point A.

   En remarquant que l'angle entre l'avant-bras et la verticale est $90° - \alpha$ et que $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, on trouve

$$\vec{\tau}_A(M\vec{g}) = \overrightarrow{AC} \times (M\vec{g}) = (0, L_2 Mg\cos\alpha, 0)\,.$$
$$\vec{\tau}_A(m\vec{g}) = \overrightarrow{AD} \times (m\vec{g}) = (0, L_3 mg\cos\alpha, 0)\,,$$

2. (2pt) Déterminer le moment de la force $\vec{T}$ par rapport au point A.

   La force $\vec{T}$ fait un angle θ avec l'avant-bras, donc on trouve

$$\vec{\tau}_A(\vec{T}) = \overrightarrow{AB} \times \vec{T} = (0, -L_1 T\sin\theta, 0)\,.$$

3. (5pt) En utilisant la condition d'équilibre appropriée, déterminer les valeurs numériques de la tension T et des composantes du vecteur $\vec{T}$.

   Le système est immobile, donc en particulier il n'y a pas d'accélération angulaire. Le moment de force total par rapport à A doit donc être nul:

$$\vec{\tau}_A(m\vec{g}) + \vec{\tau}_A(M\vec{g}) + \vec{\tau}_A(\vec{T}) = 0\,.$$

   En regardant les composantes de cette équation, nous trouvons la condition

$$(L_3 mg + L_2 Mg)\cos\alpha - L_1 T\sin\theta = 0.$$

   Nous résolvons pour T: la solution est

$$T = \frac{g\cos\alpha\,(L_3 m + L_2 M)}{L_1\sin\theta} = 337N\,.$$

   En remarquant que l'angle que fait $\vec{T}$ avec la verticale est $90° - \alpha - \theta = 45°$, on trouve les composantes de $\vec{T}$:

$$\vec{T} = 337N(-\sin 45°, \cos 45°, 0) = (-238.3N, 238.3N, 0)\,.$$

4. (3pt) Que vaut l'accélération de ce système? En déduire qu'il existe nécessairement une quatrième force. Calculer cette force et donner son point d'application.

   Le système étant immobile, son accélération doit être nulle: $\vec{a} = 0$.
   Cela est donc équivalent à $\vec{F} = 0$ (où $\vec{F}$ est la force totale). Les trois forces $m\vec{g}$, $M\vec{g}$ et $\vec{T}$ n'ont pas une somme nulle, il doit donc y avoir une quatrième force, égale à $-m\vec{g} - M\vec{g} - \vec{T}$, soit

$$-m\vec{g} - M\vec{g} - \vec{T} = (238.3N, -209N, 0)\,.$$

   Le point d'application est nécessairement en A, car autrement le moment de force total ne serait pas égal à zéro.

QUESTION 3: *(10 points)*

On considère un ressort de constante de rappel k, horizontal et attaché à son extrémité gauche à un mur et à son extrémité droite à un bloc de masse m que nous considérons comme un corps ponctuel. Le bloc est posé sur une table horizontale, et on note μ_d le coefficient de frottement dynamique entre le bloc et la table. On note P_0 la position d'équilibre du ressort. La position initiale du bloc, que nous notons P_i, est située à gauche du point P_0 (voir figure 3), de sorte que le ressort est comprimé à l'instant initial. La vitesse intiale du bloc est nulle.

Afin de fixer les notations, on note t_i l'instant initial du problème, et on note t_f l'instant final qui correspond au moment où le bloc arrive en P_0 pour la première fois.

On note d la norme de $\overrightarrow{P_0P_i}$, et on positionne notre point de référence O au point d'attache du ressort avec le mur. L'énergie potentielle gravitationnelle est donc nulle dans tout ce problème.

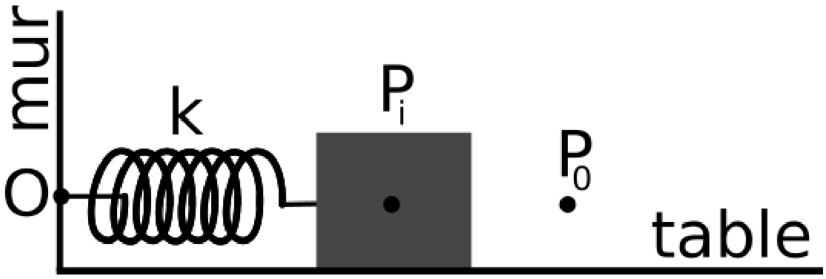


Figure 3: Un ressort est comprimé avant d'être relâché, poussant un bloc sur une table.

1. (2pt) Que vaut l'énergie mécanique initiale E_i du bloc? Exprimer votre réponse en fonction de k et de d.

   Energie potentielle pour un ressort: $E_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}k||\overrightarrow{P_0P_i}||^2 = \frac{kd^2}{2}$. Comme la vitesse initiale est nulle, on a $E_{\mathrm{C}} = 0$, et donc l'énergie mécanique initiale vaut

$$E_i = \frac{kd^2}{2}$$

2. (2pt) Que vaut la norme de la force de frottement F_d? Donner également son sens lorsque le bloc se déplace depuis P_i vers P_0.

   La norme est donnée par la formule $F_d = \mu_d N$, où N est la norme de la force normale exercée par la table. On a donc $N = mg$ car il n'y a pas d'accélération dans le sens perpendiculaire à la table, et donc $F_d = \mu_d mg$. Concernant le sens de $\vec{F_d}$: tant que le bloc est entre P_i et P_0 et se dirige vers P_0, $\vec{F_d}$ est vers la gauche sur le dessin (autrement dit, le même sens que $\overrightarrow{P_0P_i}$).

3. (2pt) Déterminer le travail W effectué par la force de frottement entre les instants t_i et t_f.

   Comme la force $\vec{F}_d$ est constante entre t_i et t_f, nous pouvons utiliser la formule du cours

   $$W = \vec{F}_d \cdot \overrightarrow{P_i P_0}\,.$$

   Nous savons de plus que $\vec{F}_d$ est dans le sens de $\overrightarrow{P_0 P_i}$. Ainsi, l'angle entre $\vec{F}_d$ et $\overrightarrow{P_i P_0}$ est de 180°, et donc

   $$W = -F_d ||\overrightarrow{P_i P_0}|| = -\mu_d m g d\,.$$

4. (2pt) En utilisant l'équation de bilan d'énergie, déterminer la norme v_f de la vitesse du bloc en t_f. Exprimer votre réponse finale en fonction de k, m, d, μ_d et g.

   Equation du bilan: $\Delta E = W$, où $\Delta E = \Delta E_C + \Delta E_P$. Lorsque le bloc arrive en P_0, son énergie potentielle est nulle et donc

   $$\Delta E = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{kd^2}{2}\,,$$

   où nous avons utilisé le résultat de la question (1). Avec la formule pour W trouvée à la question (3), cela donne l'équation

   $$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{kd^2}{2} = -\mu_d m g d\,.$$

   On résoud pour v_f et on trouve:

   $$v_f = \sqrt{d\left(\frac{kd}{m} - 2\mu_d g\right)}\,.$$

5. (2pt) Quelle est la valeur maximale que peut prendre m afin que le bloc puisse atteindre P_0?

   Pour que le résultat de la question (4) ait un sens, il faut que le nombre sous la racine soit positif, ce qui revient à demander:

   $$\frac{kd}{m} - 2\mu_d g \geq 0\,.$$

   Dans le cas limite, la masse atteint $m = m_{\max}$, où $m_{\max}$ sature l'inégalité ci-dessus. Cela nous donne la valeur suivante:

   $$m_{\max} = \frac{kd}{2\mu_d g}\,.$$

Question 4: *(10 points)*

On considère un corps ponctuel de masse M entrant en collision avec un corps ponctuel de masse m. Avant la collision, la vitesse $\vec{V}$ du premier corps est dirigée vers le bas sur la figure 4 et celle du second corps, notée $\vec{v}$, est dirigée vers la gauche. Après la collision, on suppose que les deux corps fusionnent en un seul corps ponctuel de masse $M+m$, et on note $\vec{V}'$ sa vitesse. L'angle formé par $\vec{V}'$ et la verticale est noté α. On néglige les effets de frottement et de la gravitation dans ce problème.

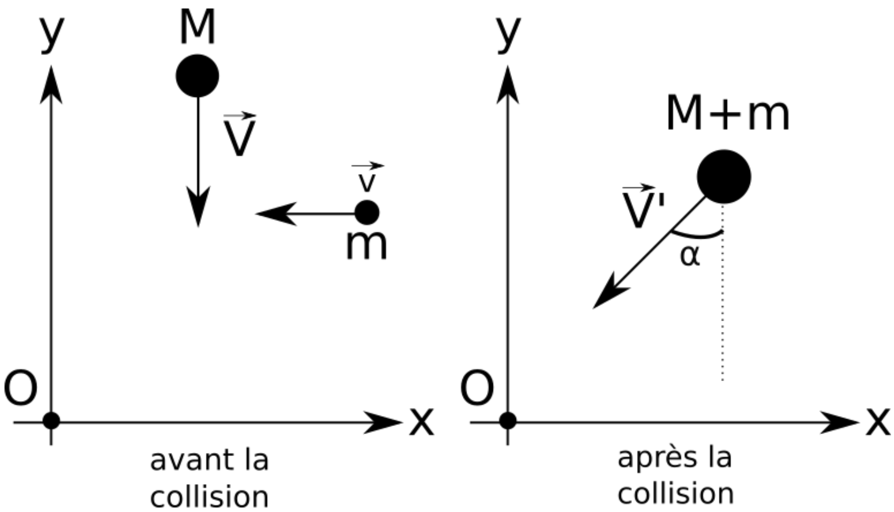


Figure 4: Deux corps de masse M et m entrent en collision. Après la collision, ils ont fusionné en un corps ponctuel de masse $M+m$.

1. (1pt) Exprimer $\vec{V}'$ en fonction de sa norme V' et de l'angle α.

   $\vec{V}' = V'(-\sin\alpha, -\cos\alpha)$

2. (4pt) En utilisant le théorème de conservation approprié vu au cours, déterminer l'angle α ainsi que V' en fonction de M, m, V et v.

   Conservation de l'impulsion: $m\vec{v} + M\vec{V} = (m+M)\vec{V}'$. On a de plus $\vec{v} = (-v, 0)$ et $\vec{V} = (0, -V)$. Donc nous avons

$$-mv = (m+M)(-V'\sin\alpha)$$
$$-MV = (m+M)(-V'\cos\alpha)$$

   Afin de trouver α et V', nous écrivons les deux équations sous la forme suivante:

$$V'\sin\alpha = \frac{m}{m+M}v\,,$$
$$V'\cos\alpha = \frac{M}{m+M}V$$

   En prenant le rapport, nous trouvons α:

$$\tan\alpha = \frac{mv}{MV} \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{mv}{MV}\,.$$

   Enfin, en prenant la somme des carrés, nous trouvons

$$(V')^2 = \frac{m^2v^2 + M^2V^2}{(m+M)^2} \Rightarrow V' = \sqrt{\frac{m^2v^2 + M^2V^2}{(m+M)^2}}\,.$$

3. (3pt) Que vaut la variation ΔE_C de l'énergie cinétique lors de cette collision? Exprimer votre réponse en fonction de M, m, V et v. *Nous vous conseillons de simplifier au maximum votre réponse pour* ΔE_C*.*

   La variation d'énergie cinétique est $\Delta E_C = E'_C - E_C$, avec

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \qquad \text{et} \qquad E'_C = \frac{1}{2}(m+M)V'^2\,.$$

   Ainsi, en utilisant le résultat de la question 2. pour éliminer V', nous trouvons:

$$\begin{aligned}\Delta E_C &= \frac{1}{2}\left((m+M)V'^2 - mv^2 - MV^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{m^2v^2 + M^2V^2}{m+M} - mv^2 - MV^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{m^2v^2 + M^2V^2 - m^2v^2 - mMv^2 - mMV^2 - M^2V^2}{m+M}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}\frac{v^2+V^2}{m+M}\,.\end{aligned}$$

4. (2pt) Peut-on ajuster la valeur de v telle que cette collision soit élastique? Si oui, trouver cette valeur. Si non, démontrer pourquoi.

   Pour une collision élastique, il faut que $\Delta E_C = 0$. La formule ci-dessus nous donne donc la condition $v^2 + V^2 = 0$, ce qui implque $v = 0$ et $V = 0$. Ainsi, si au moins une des deux vitesses est non-nulle (ce qui nécessaire si nous voulons qu'il y ait une collision!), alors la collision est nécessairement inélastique.

QUESTION 5: *(10 points)*

Vous allez analyser la conduction électrique d'ions sodium Na^+ dans un canal ionique qui s'élargit au sein d'une membrane cellulaire isolante d'épaisseur $\ell = 9nm$ (figure 1). Le canal est modélisé par deux cylindres identiques à l'entrée et à la sortie de la membrane (tous deux labellisés a, de longueur $\ell/3$, et de diamètre $D_a = 3nm$) ainsi que par un cylindre intermédiaire (labellisé b, de même longueur, et de diamètre double $D_b = 6nm$). La conductivité vaut $\sigma = 0.1/\Omega m$ et la densité d'ions Na^+ vaut $n = 3.5\,10^{22}/m^3$ dans chacun de ces cylindres. Le champ électrique intra-membranaire $\vec{E}_m$ pointe verticalement vers le bas de façon homogène avec une intensité de $6.5\,10^6 N/C$.

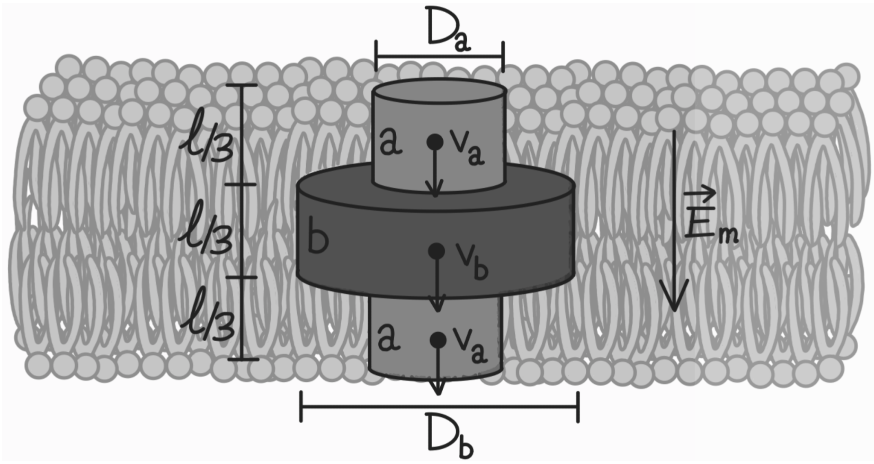


Figure 1: Canal ionique de conformation non-cylindrique.

1. (4pt) Calculez la résistance totale R de ce canal.

$$R_a = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell/3}{\pi D_a^2/4} \quad \text{et idem pour } R_b, R_c$$

$$R = R_a + R_b + R_a = \frac{4\ell}{3\pi\sigma}\left(\frac{2}{D_a^2}+\frac{1}{D_b^2}\right)$$

$D_b = 2D_a$

$$= \frac{3\ell}{\pi\sigma D_a^2} = 9.5\ 10^9\,\Omega$$

2. (3pt) Déterminez l'intensité I du courant sodique qui le traverse. *Si vous n'avez pas trouvé de réponse à la sous-question précédente, utilisez $R = 10^{10}\Omega$.*

$$\Delta V = E_m \ell$$

$$I = \Delta V/R = E_m \ell/R$$

$$= \frac{\pi\sigma D_a^2 E_m}{3} = 6.1\,pA \quad [5.9\,pA \text{ pour } R = 10^{10}\Omega]$$

3. (3pt) Combien le temps met un ion Na^+ pour traverser la membrane? *(Aide: Estimez d'abord les vitesses v_a et v_b indiquées dans la figure 1.) Si vous n'avez pas trouvé de réponse à la sous-question précédente, utilisez $I = 5pA$.*

$$I = e n v_a \pi D_a^2/4 \Rightarrow v_a = \frac{4I}{e n \pi D_a^2} = \frac{4\sigma E_m}{3en} \quad 155\,m/s \quad [126\,m/s \text{ si } I = 5pA \text{ utilisé}]$$

$$I = e n v_b \pi D_b^2/4 \Rightarrow v_b = \frac{4I}{e n \pi D_b^2} = \frac{4\sigma E_m}{3en}\left(\frac{D_a}{D_b}\right)^2 = \frac{v_a}{4}$$

$D_b = 2D_a$

temps pour traverser a — temps pour traverser b

$$\text{Temps} = \frac{\ell/3}{v_a} + \frac{\ell/3}{v_b} + \frac{\ell/3}{v_a} = \frac{2\ell}{v_a} = \frac{3en\ell}{2\sigma E_m} = 116\,ps$$

$[= 143\,ps \text{ si } I = 5pA \text{ utilisé}]$

Question 6: *(10 points)*

La figure 2 reprend l'expérience de lévitation magnétique du cours. Une boucle composée de $N = 370$ spires rigides de rayon $R = 2.4cm$ (masse totale $m = 36gr$) entoure un aimant posé verticalement. Vous allez examiner pourquoi cette boucle, soumise à un courant électrique $I = 0.7A$ (dans le sens indiqué sur la figure), lévite à hauteur z. Le graphique à droite de la figure donne une mesure expérimentale de la composante horizontale $B_h > 0$ du champ magnétique de l'aimant sur la boucle, en fonction de sa hauteur. Pour l'accélération pesanteur, utilisez $g = 10m/s^2$.

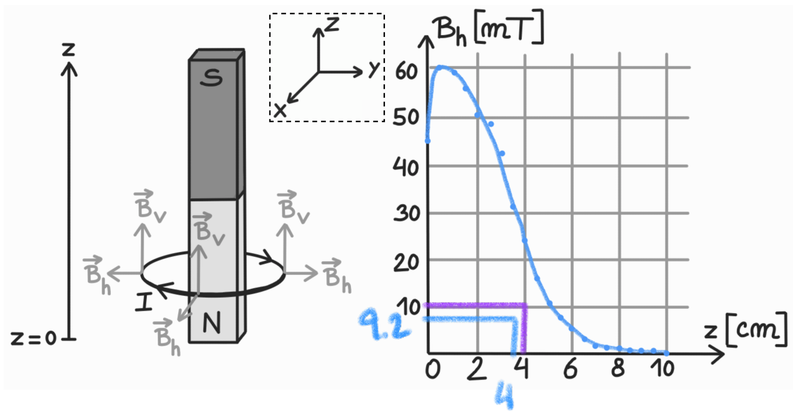
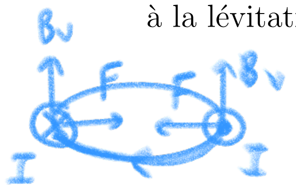


Figure 2: Expérience de lévitation d'une boucle.

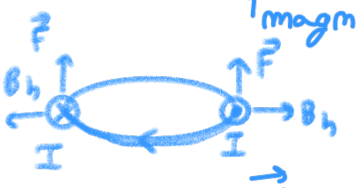
1. (1pt) Expliquez pourquoi la composante verticale B_v du champ magnétique ne contribue pas à la lévitation de la boucle.



Règle de la main droite

↪ force due à B_v horizontale
et s'annule sur la boucle rigide

2. (4pt) Déterminez la norme et la direction de la force magnétique $\vec{F}_{\text{magn}}$ exercée sur la boucle et celle de son poids $\vec{F}_{\text{poids}}$, en fonction de B_h et d'autres paramètres du problème. Utilisez le système d'axes (x, y, z) de la figure 2.



$\vec{F}_{magn}$: Norme $F_{magn} = I B_h L = I B_h 2\pi R N$
Direction selon axe z positif

$\vec{F}_{poids}$: Norme $F_{poids} = mg$
Direction selon axe z négatif

3. (3pt) Déterminez numériquement la valeur de B_h nécessaire pour que la boucle soit en lévitation à une hauteur fixe.

$\vec{F} = \vec{F}_{magn} + \vec{F}_{poids} = 0$

↪ $2\pi R N I B_h - mg = 0$

↪ $B_h = \dfrac{mg}{2\pi R N I} = 9.2\,mT$

4. (2pt) Estimez la hauteur z de lévitation, à $0.5cm$ près. *Si vous n'avez pas trouvé de réponse à la sous-question précédente, utilisez $B_h = 10mT$.*

D'après le graphe : $z \simeq 4.0cm$

[idem si $B_h = 10\,mT$ utilisé]

$\rho_0 = 1000kg/m^3$	$\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$	$1\text{atm} = 101325\text{Pa}$
$g = 10m/s^2$	$\frac{\mathrm{d}\sin(ax)}{\mathrm{d}x} = a\cos(ax)$	$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$
$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\vec{a}_\mathrm{c} = -\omega^2 \vec{r}$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$	$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = AB\sin\theta$	$v = \omega r$
$\cos\alpha = \frac{\text{adjacent}}{H}$	$F_\mathrm{s}^\mathrm{max} = \mu N$	$Q = Av$
$E_\mathrm{P} = \frac{1}{2}kr^2$	$E_\mathrm{P} = -m\vec{g} \cdot \vec{r}$	$W = \vec{f} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$
$A = \pi R^2$	$\Delta E_\mathrm{c} = W_\mathrm{tot.}$	

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x)$$

$e = 1.6\,10^{-19}\,C$	$\epsilon_0 = 8.9\,10^{-12}\,\frac{A^2s^4}{kg\,m^3}$	$\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\,\frac{Tm}{A}$
$1\mu X = 10^{-6}X$ (micro)	$1nX = 10^{-9}X$ (nano)	$1pX = 10^{-12}X$ (pico)
$\vec{F}_{Q/q} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$	$\vec{F}_{\vec{E}/q} = q\vec{E}$	$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$
$\sigma = Q/A$	$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}$	$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$
$\frac{1}{2}mv^2 + qV$	$\Delta V = EL$	$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$
$\Delta V = RI$	$R = \frac{L}{S}\frac{1}{\sigma}$	$I = env_eS$
$R = R_1 + R_2$	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$	$P = \Delta V I$
$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$	$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$
$B = \mu_0 \frac{N}{L} I$	$\vec{F}_{\vec{B}/I} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$	$F_{I_1/I_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d}$
$\vec{F}_{\vec{B}/q} = q\vec{v} \times \vec{B}$	$\vec{v} \perp \vec{v} \times \vec{B}$	$R_L = \frac{mv}{\|q\|B}$