Université Libre de Bruxelles

Année Académique 2023-2024 — *PHYS-G1102*

Physique appliquée aux sciences de la Vie — *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Médecine et en Sciences Dentaires

Examen

Janvier

Correctif

Nom:

Prénom:

Matricule:

Section:

Q1: /11	Q2: /14	Q3: /12	Q4: /14	Q5: /13

Instructions: L'usage de documents n'est pas autorisé. L'examen dure 3 heures. Il y a 5 questions. Vous êtes responsables de vérifier que cet examen comporte bien 12 pages. Vous n'êtes pas autorisés à dégraffer les pages de l'examen. Vous êtes autorisés à utiliser une calculatrice (pas de smartphone). Un aide-mémoire vous est fourni à la fin de ce document. Vous pouvez utiliser les résultats du cours théorique sans démonstration, mais pour le reste justifiez bien toutes vos réponses. Les valeurs numériques peuvent être arrondies au 2e chiffre significatif. Sauf indication contraire, tous les résultats numériques doivent être exprimés dans les unités du Système International. Vous pouvez prendre $g = 10m/s^2$ et $\rho_0 = 1000kg/m^3$.
Lorsqu'il vous est demandé de dessiner une force sur un schéma, on demande que la direction et le sens soient le plus précis possible, mais la norme ne doit pas nécessairement être à l'échelle.
Veuillez répondre à chaque question dans l'espace prévu à cet effet après chaque énoncé. S'il vous manque de la place, vous pouvez faire référence au verso d'une des feuilles d'examen pour indiquer où se trouve votre réponse. Veillez à indiquer *très clairement* si vous recourez à ce système.
Enfin, le verso des feuilles d'examen peut-être également utilisé comme brouillon pour vos calculs et raisonnements.
Note finale: Le nombre total de points, sur les 5 questions, s'élève à 64 points. Le nombre de points obtenus est rapporté sur 20, et la note de l'examen est alors obtenue en arrondissant à l'entier le plus proche.

Question 1: *(11 points)*

On considère trois corps en chute libre. A l'instant $t = 0s$, le premier corps (que l'on appellera le projectile) est lancé depuis le point O avec une vitesse $\vec{v}_0$. Ce vecteur fait un angle θ avec l'horizontale comme indiqué sur la figure 1. Deux autres corps, que l'on appellera la cible A et la cible B, sont lâchés au même instant sans vitesses initiales depuis les points notés A et B sur la figure 1.

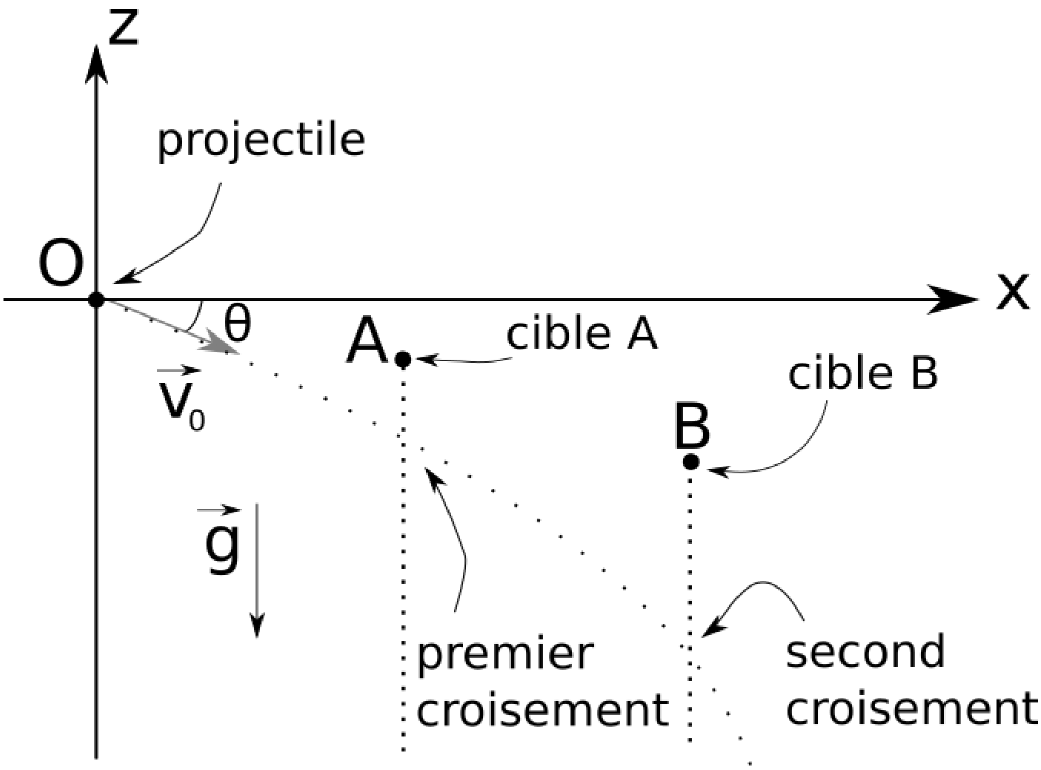


Figure 1: Le projectile croise sur son chemin deux cibles lâchées sans vitesses initiales.

On utilisera le système d'axes Oxz dans toute la question. Les points A et B sont tels que $\overrightarrow{OA} = (d_A, -h_A)$ et $\overrightarrow{OB} = (d_B, -h_B)$, où les paramètres sont donnés par $d_A = 2m$, $d_B = 3m$, $h_A = 10m$, $h_B = 15m$. On suppose de plus que si deux corps se croisent dans ce problème, il n'y a aucune interaction entre eux et ils continuent leur trajectoire en chute libre. L'angle θ et la norme v_0 sont inconnus.

1. (1pt) Donner les composantes du vecteur $\vec{g}$.

$\vec{g} = (0, -g) \qquad g = 10\, m/s^2$

2. (1pt) Donner les composantes du vecteur $\vec{v}_0$ en fonction de sa norme v_0 et θ.

$\vec{v}_0 = v_0 \left(\cos\theta, -\sin\theta \right)$

3. (6pt) On suppose que le croisement entre le projectile et la première cible A a lieu à un point de coordonnée suivant l'axe Oz valant $Z_A = -15m$. Déterminer l'angle θ, la norme v_0 et l'instant t_A correspondant à ce croisement.

Projectile : $\begin{cases} x_p(t) = v_0 \cos\theta\, t \\ z_p(t) = -v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$ Cible A : $\begin{cases} x_A(t) = d_A \\ z_A(t) = -h_A - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Croisement : $v_0 \cos\theta\, t_A = d_A$; $-v_0 \sin\theta\, t_A - \frac{1}{2} g t_A^2 = -h_A - \frac{1}{2} g t_A^2 = z_A$

$\Rightarrow t_A = \sqrt{\frac{-2}{g}(z_A + h_A)} = 1.0\,s$; $v_0 \cos\theta = d_A / t_A$ $v_0 \sin\theta = h_A / t_A$

$\Rightarrow v_0 = \sqrt{(d_A/t_A)^2 + (h_A/t_A)^2} = 10.2\,m/s$

$tg\theta = h_A / d_A \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{h_A}{d_A}\right) = 78{,}7°$

4. (2pt) Le projectile continue sa trajectoire pour aller croiser la seconde cible. A quel instant t_B ce croisement a-t-il lieu? Que vaut la coordonnée Z_B correspondante?

Cible B : $\begin{cases} x_B(t) = d_B \\ z_B(t) = -h_B - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Croisement : $v_0 \cos\theta\, t_B = d_B$; $-v_0 \sin\theta\, t_B - \frac{1}{2} g t_B^2 = -h_B - \frac{1}{2} g t_B^2$

$\Rightarrow t_B = \frac{d_B}{v_0 \cos\theta} = 1.50\,s$

$z_B = -h_B - \frac{1}{2} g t_B^2 = -26.3\,m$

5. (1pt) Montrer en toute généralité (c'est-à-dire sans supposer de valeur numérique pour les paramètres) que de tels croisements ne sont possibles que si les paramètres d_A, d_B, h_A et h_B sont tels que $h_A d_B = h_B d_A$.

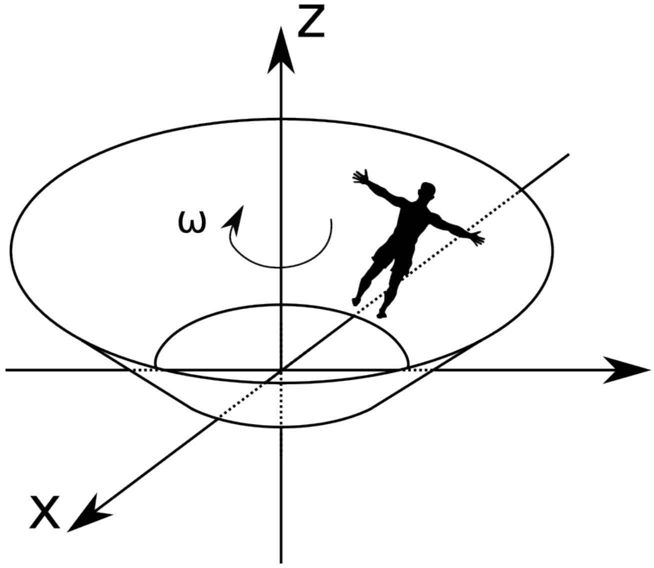
Avec ce qui précède on doit avoir $tg\theta = \frac{h_B}{d_B}$

Or on doit aussi avoir $tg\theta = \frac{h_A}{d_A}$. Donc il faut que $\frac{h_B}{d_B} = \frac{h_A}{d_A} \iff h_A d_B = h_B d_A$.

QUESTION 2: *(14 points)*

On considère une centrifugeuse dans laquelle les futurs astronautes vont pouvoir s'entrainer à résister à des accélérations supérieures à g. Dans cette centrifugeuse, le candidat est d'abord debout et adossé à une paroi qui est légèrement inclinée vers l'extérieur. La centrifugeuse se met alors en mouvement, le candidat décrivant donc un mouvement circulaire autour de l'axe Oz. A partir d'une vitesse angulaire suffisamment grande, le sol descend de quelques centimètres, laissant ainsi le candidat "collé" à la paroi. La vitesse angulaire est alors maintenue constante.

Le dispositif est représenté sur la figure 2. Sur le schéma de gauche, le système est représenté en perspective. Le schéma de droite correspond à la même situation, où le corps humain est représenté par un bloc que nous supposons ponctuel dans ce problème. L'angle que fait la paroi avec l'horizontale est noté θ, le centre de rotation est noté C et la position du bloc est notée P. La norme de la vitesse angulaire est notée ω, le sens de rotation étant horlogique lorsque le dispositif est vu du dessus.



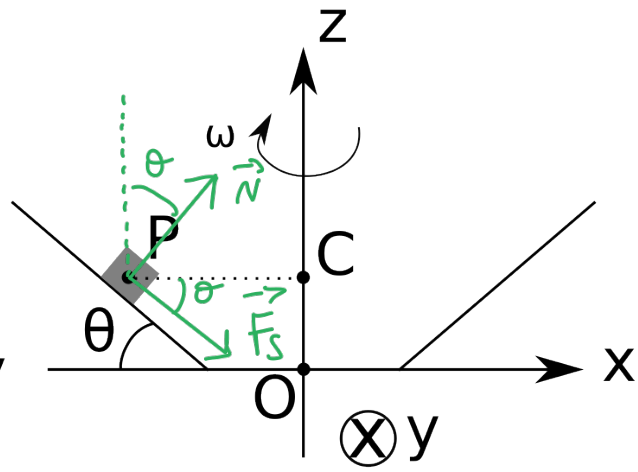


Figure 2: Lorsque la centrifugeuse est à sa vitesse finale, le sol est descendu et la personne n'a plus les pieds en contact avec le sol. Elle est donc uniquement en contact avec la paroi de la centrifugeuse, qui fait un angle θ avec l'horizontale.

On note $R = 2m$ la distance entre C et P, $m = 70kg$ la masse du bloc et μ le coefficient de frottement statique entre le bloc et la paroi.

Remarque: si vous le désirez, vous pouvez utiliser un autre système d'axes que celui proposé sur la figure 2. Dans ce cas, veillez à le représenter sur la figure afin que nous puissions comprendre vos calculs!

1. (2pt) En supposant que le dispositif a mis 45 secondes pour atteindre la vitesse angulaire $\omega = 1.13\pi/s$, que vaut le vecteur d'accélération angulaire moyen $\vec{\alpha}$ sur cet intervalle de temps?

$\vec{\alpha} = (0, 0, -\alpha)$ avec $\alpha = \frac{\omega}{\Delta t} = 0.0251\pi/s^2 = 0.789/s^2$ (radiants/s²).

A partir de maintenant et pour tout le reste de la question, on suppose que la vitesse angulaire reste constante et que la personne reste collée à la paroi.

2. (2pt) Quelle est la norme de l'accélération du bloc? Exprimer votre réponse en fonction de g.

MRU => $a = \omega^2 R = 25.2\, m/s^2 = 2.52\, g$.

3. (4pt) Déterminer toutes les forces exercées par la paroi sur le bloc, en supposant que la composante suivant Oz de la force de frottement statique entre le bloc et la paroi est négative. Exprimer vos réponses en fonction de θ, ω, R, g et m. *(Aide: faites tous vos calculs dans la configuration représentée sur le schéma de droite de la figure 2.)*

Poids: $\vec{P} = (0, 0, -mg)$ Force normale: $\vec{N} = N(\sin\theta, 0, \cos\theta)$

Force de frottements: $\vec{F_S} = F_S(\cos\theta, 0, -\sin\theta)$

$\vec{F} = m\vec{a}$ avec $\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F_S}$ et $\vec{a} = (a, 0, 0)$; $a = \omega^2 R$

$\Rightarrow N\sin\theta + F_S\cos\theta = m\omega^2 R$ et $N\cos\theta - F_S\sin\theta = mg$

$$\begin{cases} N\sin^2\theta + F_S\cos\theta\sin\theta = m\omega^2 R\sin\theta \\ N\cos^2\theta - F_S\sin\theta\cos\theta = mg\cos\theta \end{cases} \Rightarrow N = m(\omega^2 R\sin\theta + g\cos\theta)$$

$$\begin{cases} N\sin\theta\cos\theta + F_S\cos^2\theta = m\omega^2 R\cos\theta \\ N\cos\theta\sin\theta - F_S\sin^2\theta = mg\sin\theta \end{cases} \Rightarrow F_S = m(\omega^2 R\cos\theta - g\sin\theta)$$

4. (2pt) Montrer que pour une valeur particulière de la vitesse angulaire, notée ω_0, la force de frottement statique est nulle. Exprimer ω_0 en fonction de θ, R et g.

$F_S = 0 \Leftrightarrow \omega_0^2 R\cos\theta - g\sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}\,tg\,\theta}$.

5. (1pt) Quelle est la conséquence de notre hypothèse sur le sens de la force de frottement sur le rapport ω/ω_0?

On doit avoir $F_S > 0 \Leftrightarrow \omega^2 > \frac{R}{g}\,tg\,\theta = \omega_0^2$

Donc $\omega/\omega_0 > 1$.

6. (3pt) Montrer que si μ est inférieur à une valeur critique $\mu_\star$ que l'on déterminera en fonction de θ, alors la vitesse angulaire ne peut pas dépasser une valeur maximale $\omega_{\max}$. Exprimer $\omega_{\max}$ en fonction des paramètres g, R, θ et μ.

$F_S \leq \mu N \Leftrightarrow \omega^2(R\cos\theta - g\sin\theta) \leq \mu(\omega^2 R\sin\theta + g\cos\theta)$

$\Leftrightarrow \omega^2 R(\cos\theta - \mu\sin\theta) \leq g(\mu\cos\theta + \sin\theta)$

Donc si $\cos\theta - \mu\sin\theta \geq 0$, alors ω^2 ne peut pas dépasser $\frac{g}{R}\frac{\mu\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$. $\cos\theta - \mu\sin\theta \geq 0 \Leftrightarrow \mu \leq tg\,\theta$.

Donc $\mu_* = tg\,\theta$ et $\omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{\mu\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}$.

QUESTION 3: *(12 points)*

Un danseur de *breakdance* est en appui sur sa tête, sa main gauche et son genou gauche. Il est immobile et son centre de gravité, noté C_G, est déterminé par le vecteur position suivant:

$$\overrightarrow{OC}_G = (d, \ell, h)\,,$$

où d, ℓ et h sont trois constantes positives. Le point de contact entre la tête et le sol est pris pour origine du système d'axes $Oxyz$. Le point B, qui correspond au point de contact entre le genou et le sol, est sur l'axe Oy à une distance D de O. La main est posée en A, et sa position est donnée par

$$\overrightarrow{OA} = (X, Y, 0)\,,$$

où X et Y sont deux constantes positives.

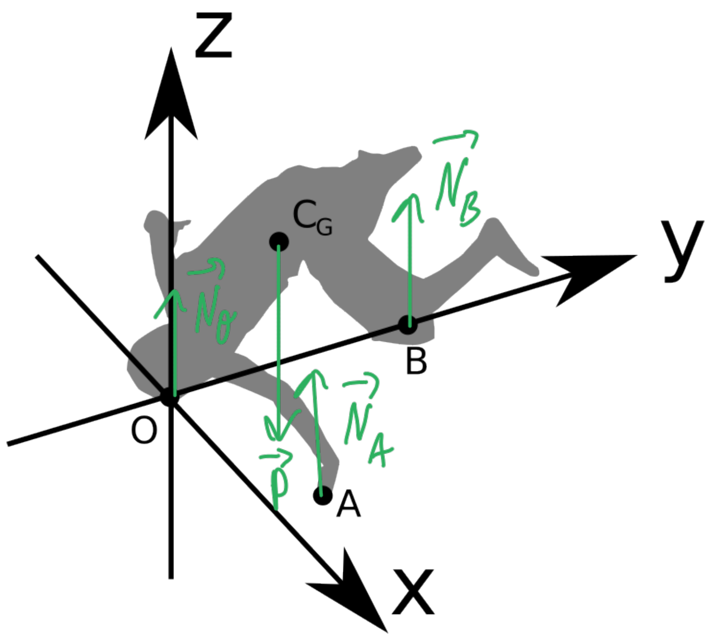


Figure 3: Les seuls points de contact entre le danseur et le sol sont les points O, A et B.

On note $\vec{N}_O, \vec{N}_A$ et $\vec{N}_B$ les forces normales exercées par le sol aux points O, A et B respectivement, et la masse du danseur est notée m. Les normes N_O, N_A et N_B sont inconnues et seront déterminées à la fin du problème.

1. (1pt) Que vaut le vecteur $\vec{N}_O + \vec{N}_A + \vec{N}_B$?

$\vec{F} = m\vec{a}$ avec $\vec{F} = \vec{N}_O + \vec{N}_A + \vec{N}_B + \vec{P}$ et $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_O + \vec{N}_A + \vec{N}_B = +(0,0,mg)$.

2. (2pt) Que vaut le moment de force par rapport à O de $\vec{N}_B$?

$\vec{\tau}_O(\vec{N}_B) = \overrightarrow{OB} \times \vec{N}_B = (0, D, 0) \times (0, 0, N_B)$

$= (DN_B, 0, 0)$

3. (2pt) Que vaut le moment de force par rapport à O de N_A?

$$\vec{\tau}_O(\vec{N}_A) = \vec{OA} \times \vec{N}_A = (X, Y, 0) \times (0, 0, N_A)$$
$$= (YN_A, -XN_A, 0)$$

4. (2pt) Que vaut le moment de force par rapport à O du poids du danseur?

$$\vec{\tau}_O(\vec{P}) = \vec{OC_G} \times \vec{P} = (d, \ell, h) \times (0, 0, -mg)$$
$$= (-\ell mg, d mg, 0)$$

5. (3pt) Déterminer les normes des forces normales en fonction des paramètres du problème.

$\vec{\tau}_O = \vec{0}$ avec $\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_O(\vec{N}_A) + \vec{\tau}_O(\vec{N}_B) + \vec{\tau}_O(\vec{P})$

Donc : $\begin{cases} DN_B + YN_A - \ell mg = 0 \\ -XN_A + dmg = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow N_A = \frac{d}{X} mg \quad \text{et} \quad N_B = \frac{\ell}{D} mg - \frac{Y}{D} \underbrace{\left(\frac{d}{X} mg\right)}_{N_A}$$
$$= mg\left(\frac{\ell}{D} - \frac{dY}{DX}\right).$$

N_0 ? $\vec{N}_0 + \vec{N}_A + \vec{N}_B = (0, 0, N_0 + N_A + N_B) = (0, 0, mg)$ (cf. 1.)

$$\Rightarrow N_0 = mg - N_A - N_B = mg\left(1 - \frac{d}{X} - \frac{\ell}{D} + \frac{dY}{DX}\right).$$

6. (2pt) On suppose à présent que le danseur parvient à soulever son genou et à rester en équilibre sur sa tête et sa main. Que doit valoir ℓ pour que cela soit possible? Exprimer votre réponse en fonction de X, Y et d.

Plus en contact avec le sol $\Rightarrow N_B = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{\ell}{D} = \frac{dY}{DX} \Leftrightarrow \ell = \frac{Y}{X} d.$$

Question 4: *(14 points)*

La partie (a) de la figure 4 montre un circuit présenté en cours. Ce circuit contient une batterie de $\Delta V = 4.0\,V$, une résistance variable R, et deux ampoules (notées $\otimes$) supposées identiques et de résistances R_1 et R_2. Un ampère-mètre (A) mesure le courant total I du circuit. La partie (b) de la figure rapporte quelques mesures expérimentales (+) de la façon dont ce courant I change lorsqu'on varie la résistance R, ainsi que deux courbes théoriques que vous allez examiner dans ce problème.

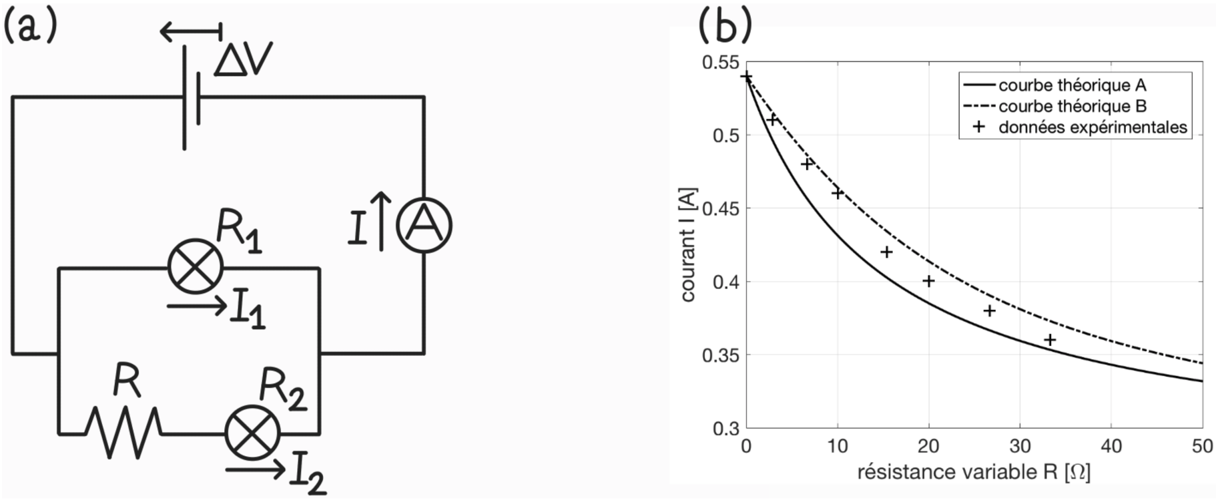


Figure 4: (a) Circuit du problème. (b) Courant I en fonction de la résistance R.

1. (1pt) Considérons en premier lieu que les ampoules soient des résistances ohmiques ordinaires. Expliquez brièvement pourquoi nous pouvons poser $R_2 = R_1$.

2. (4pt) Démontrez la relation $I = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R+R_1}\right)\Delta V$.

3. (3pt) À laquelle des deux courbes théoriques (A ou B; voir partie b de figure 4) correspond cette relation? Justifiez. *(Aide: Estimez d'abord la valeur de R_1 à l'aide du graphe en $R = 0$.)*

4. (4pt) L'autre courbe modélise le comportement non-ohmique des ampoules avec $R_1 = aI_1$ et $R_2 = aI_2$. Déterminez la relation entre I et R dans ce cas, et estimez le paramètre a. *(Aide #1: Résolvez ce circuit inhabituel à l'aide des lois de Kirchoff. Aide #2: L'équation $a{I_2}^2 + RI_2 - \Delta V = 0$ a pour solutions $I_2 = (-R \pm \sqrt{R^2 + 4a\Delta V})/2a$. Comment exclure l'une de ces 2 solutions?)*

5. (2pt) Les mesures expérimentales (+) collent bien à la courbe non-ohmique à petit R mais convergent vers la courbe ohmique à plus grand R. Expliquez qualitativement pourquoi.

Question 5: *(13 points)*

Les humains semblent dépourvus d'un sens de la magnétoception. Pourtant, des patients rapportent désorientation, vertiges, et nausées lors d'examens dans des IRM de recherche à 7 ou 11 T. Votre but est d'explorer l'hypothèse qu'un champ magnétique intense puisse affecter la transduction de force appliquée sur le kinocil de cellules sensorielles du système vestibulaire (voir figure 5). Modélisons un kinocil comme une barre rigide de longueur $L = 20\,\mu m$, de masse $m = 2.7\,10^{-13}\,kg$, et de position naturelle perpendiculaire à sa surface d'attache (barre grise). Une force $\vec{F}_\mathrm{a}$ appliquée au kinocil génère:

- une déviation d par rapport à sa position naturelle (barre noire),
- une force de rappel $\vec{F}_\mathrm{r}$ parallèle à la surface et dirigée vers sa position naturelle,
- un courant I dans le kinocil dirigé vers cette surface et stimulant la cellule sensorielle ($\diamond$).

Des expériences ont déterminé que $F_\mathrm{r} = kd$ avec $k = 3\,pN/\mu m$ et $I = \alpha d$ avec $\alpha = 33\,nA/\mu m$.

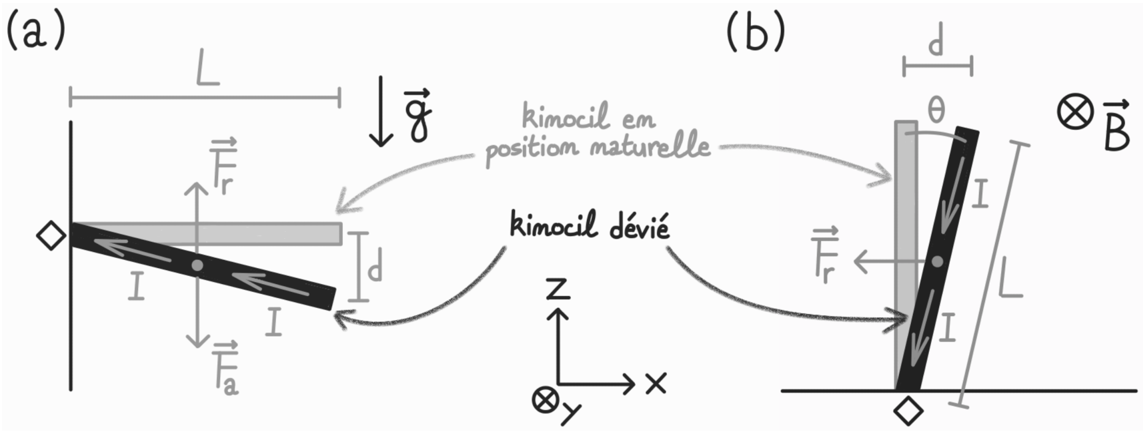


Figure 5: Transduction de force par un kinocil. (a) Poids. (b) Force magnétique.

1. (3pt) Pour vous échauffer, déterminez le déplacement vertical d et le courant I à l'équilibre sous l'effet de la pesanteur (voir partie a de la figure).

2. (2pt) Passons à l'effet possible d'un champ magnétique $\vec{B}$ parallèle à l'axe y (voir partie b de la figure). Expliquez d'abord pourquoi la position naturelle est une position d'équilibre.

3. (1pt) Dessinez la force magnétique sur le kinocil dévié (barre noire en partie b de la figure).

4. (4pt) Négligeant ici l'effet de la pesanteur, démontrez que toute déviation horizontale d non-nulle satisfait à $d = \sqrt{L^2 - (\frac{k}{\alpha B})^2}$ à l'équilibre. *(Aide: La force de rappel étant orientée selon l'axe x, seule la composante horizontale de la force magnétique compte. L'angle θ dessiné sur la figure vous sera sans doute utile.)*

5. (3pt) Estimez l'intensité de champ magnétique minimale B_{min} nécessaire pour générer une stimulation sensorielle, et déterminez dans laquelle ou lesquelles des situations suivantes le kinocil permet une magnétoception:
   (a) géomagnétisme ($50\,\mu T$)?
   (b) magnétisme d'une IRM clinique (1.5 ou $3\,T$)?
   (c) magnétisme d'une IRM de recherche (7 ou $11\,T$)?

$$\rho_0 = 1000 kg/m^3 \qquad \|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad 1\text{atm} = 101325\text{Pa}$$

$$g = 10 m/s^2 \qquad \frac{\mathrm{d}\sin(ax)}{\mathrm{d}x} = a\cos(ax) \qquad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p \qquad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \vec{a}_{\mathrm{c}} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \qquad \|\vec{A}\times\vec{B}\| = AB\sin\theta \qquad v = \omega r$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{adjacent}}{H} \qquad F_{\mathrm{s}}^{\max} = \mu N \qquad Q = Av$$

$$E_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}kr^2 \qquad E_{\mathrm{P}} = -m\vec{g}\cdot\vec{r} \qquad W = \vec{f}\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$A = \pi R^2 \qquad \Delta E_{\mathrm{c}} = W_{\mathrm{tot.}}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x)$$

$$e = 1.6\,10^{-19}\,C \qquad \epsilon_0 = 8.9\,10^{-12}\,\frac{A^2 s^4}{kg\,m^3} \qquad \mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\,\frac{Tm}{A}$$

$$1\mu X = 10^{-6}X \text{ (micro)} \qquad 1nX = 10^{-9}X \text{ (nano)} \qquad 1pX = 10^{-12}X \text{ (pico)}$$

$$\vec{F}_{Q/q} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad \vec{F}_{\vec{E}/q} = q\vec{E} \qquad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\sigma = Q/A \qquad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} \qquad \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + qV \qquad \Delta V = EL \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Delta V = RI \qquad R = \frac{L}{S}\frac{1}{\sigma} \qquad I = env_eS$$

$$R = R_1 + R_2 \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad P = \Delta V I$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$B = \mu_0\frac{N}{L}I \qquad \vec{F}_{\vec{B}/I} = Id\vec{\ell}\times\vec{B} \qquad F_{I_1/I_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d}$$

$$\vec{F}_{\vec{B}/q} = q\vec{v}\times\vec{B} \qquad \vec{v}\perp\vec{v}\times\vec{B} \qquad R_L = \frac{mv}{|q|B}$$