Université Libre de Bruxelles

Année Académique 2023-2024 — *PHYS-G1102*

Physique appliquée aux sciences de la Vie — *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Médecine et en Sciences Dentaires

Examen

Juin

Correctif

Nom:

Prénom:

Matricule:

Section:

Q1: /10	Q2: /10	Q3: /14
Q4: /12	Q5: /10	Q6: /10

Instructions: L'usage de documents n'est pas autorisé. L'examen dure 3 heures. Il y a 6 questions. Vous êtes responsables de vérifier que cet examen comporte bien 12 pages. Vous n'êtes pas autorisés à dégraffer les pages de l'examen. Vous êtes autorisés à utiliser une calculatrice (pas de smartphone). Un aide-mémoire vous est fourni à la fin de ce document. Vous pouvez utiliser les résultats du cours théorique sans démonstration, mais pour le reste justifiez bien toutes vos réponses. Les valeurs numériques peuvent être arrondies au 2e chiffre significatif. Sauf indication contraire, tous les résultats numériques doivent être exprimés dans les unités du Système International. Vous pouvez prendre $g = 10m/s^2$ et $\rho_0 = 1000kg/m^3$.
Lorsqu'il vous est demandé de dessiner une force sur un schéma, on demande que la direction et le sens soient le plus précis possible, mais la norme ne doit pas nécessairement être à l'échelle.
Veuillez répondre à chaque question dans l'espace prévu à cet effet après chaque énoncé. S'il vous manque de la place, vous pouvez faire référence au verso d'une des feuilles d'examen pour indiquer où se trouve votre réponse. Veillez à indiquer *très clairement* si vous recourez à ce système. Enfin, le verso des feuilles d'examen peut-être également utilisé comme brouillon pour vos calculs et raisonnements.
Note finale: Le nombre total de points, sur les 6 questions, s'élève à 66 points. Le nombre de points obtenus est rapporté sur 20, et la note de l'examen est alors obtenue en arrondissant à l'entier le plus proche.

QUESTION 1: *(10 points)*

Un petit projectile est tiré depuis un point au sol que l'on note O, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. En utilisant les coordonnées $Oxyz$ telles que sur la figure 1, le vecteur $\vec{v}_0$ est dans le plan Oxz, et on note θ l'angle qu'il fait avec l'axe Ox. A une distance d de O le long de l'axe x, passe une ligne de chemin de fer, les rails étant dans le plan Oxy et parallèles à l'axe des y. Un train, que nous assimilons à un corps ponctuel, se déplace dans la direction des y croissants avec une vitesse $\vec{V}$ constante. Le projectile est lancé au moment où le train passe au point de coordonnée $y = Y_0$ avec $Y_0 < 0$.

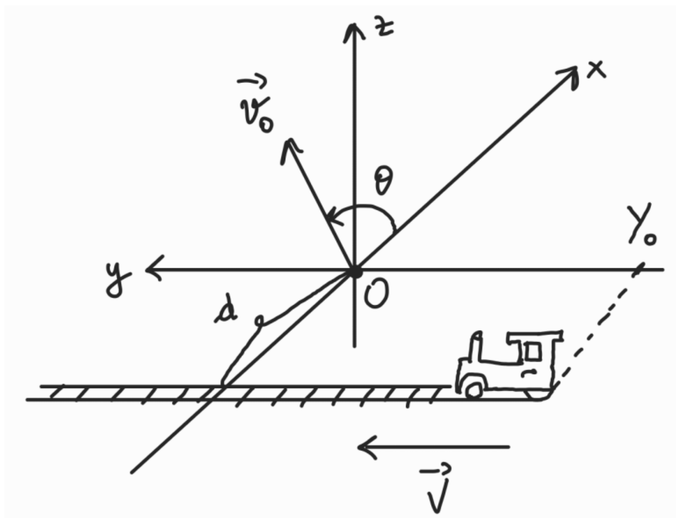


Figure 1: Un projectile est lancé depuis le point O vers un train en mouvement. Les rails sont parallèles à l'axe des y.

On néglige les forces de frottement dans ce problème, et on utilise les axes x, y et z tels que sur la figure 1. Le but de cette question est de déterminer v_0 et θ de façon à ce que le projectile intercepte le train.

1. (1pt) Exprimer les composantes suivant x, y et z du vecteur d'accélération gravitationnelle $\vec{g}$ en fonction de g.

   $\vec{g} = (0, 0, -g)$

2. (1pt) Exprimer les composantes suivant x, y et z de la vitesse initiale $\vec{v}_0$ en fonction de v_0 et θ.

   $\vec{v}_0 = v_0 \left(\cos\theta, \ 0, \ \sin\theta \right)$

3. (1pt) On note $x_P(t)$, $y_P(t)$ et $z_P(t)$ les coordonnées de la position du projectile au temps t. Que valent ces composantes en fonction des paramètres du problème, pour n'importe quelle valeur de t?

   $x_p(t) = v_0 t \cos\theta \qquad y_p(t) = 0$

   $z_p(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$

4. (1pt) Même question que ci-dessus, mais avec les coordonnées x_{T}, y_{T} et z_{T} du train.

$x_T(t) = -d \qquad y_T(t) = Y_0 + Vt \qquad z_T(t) = 0$

5. (4pt) On note $t_\star$ le temps auquel l'impact a lieu. Déterminer $t_\star$, v_0 et θ en fonction de Y_0, V, d et g afin que la collision ait lieu.

$x_p(t_*) = x_T(t_*) \qquad y_p(t_*) = y_T(t_*) \qquad z_p(t_*) = z_T(t_*)$

$\Rightarrow v_0 t_* \cos\theta = -d \qquad 0 = Y_0 + Vt_* \qquad v_0 t_* \sin\theta - \frac{1}{2} g t_*^2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{t_* = -\frac{Y_0}{V}}$ et $\begin{cases} v_0 \cos\theta = -d/t_* = dV/Y_0 \\ v_0 \sin\theta = \frac{1}{2} g t_* = -\frac{1}{2} gY_0/V \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\left(\frac{dV}{Y_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} gY_0/V\right)^2}}$

et $\tan\theta = -\frac{1}{2} \frac{gY_0}{V} \frac{Y_0}{dV} = -\frac{1}{2} \frac{gY_0^2}{dV^2}$.

Attention, θ est dans le 2e cadran !

6. (2pt) Application numérique: calculer v_0 et θ pour $d = 1.5m$, $V = 22km/h$ et $Y_0 = -2m$.

$V = 22 km/h = \frac{22000}{3600} \frac{m}{s} = 6.11 \ m/s$

$\Rightarrow \boxed{v_0 = 4.87 \ m/s}$

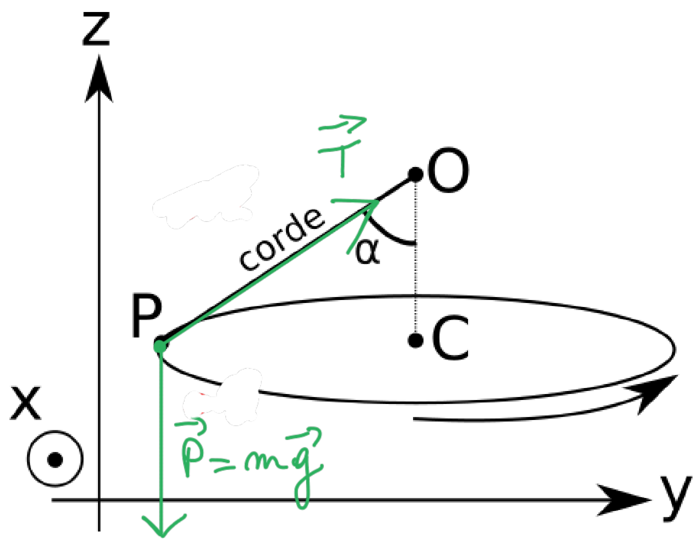
$\mathrm{Arctg}\left(-\frac{1}{2} \frac{gY_0^2}{dV^2}\right) = -19.7° \Rightarrow \theta = 180° - 19.7° = 160°$ $\qquad \boxed{\theta = 160°}$

↳ fonction de la calculette $\Rightarrow$ 1er cadran

Question 2: *(10 points)*

Dans le champ de pesanteur, on considère un corps ponctuel en un point P de masse $m = 22kg$ attaché à une corde. La corde est attachée à son autre extrémité en un point fixe O. Le corps est en mouvement circulaire uniforme dans le plan horizontal Oxy, le centre de rotation C étant situé sur l'axe vertical passant par O. On note α l'angle que fait la corde avec la verticale Oz. Dans toute cette question, on s'intéresse à l'instant représenté sur la figure 2, où le vecteur $\overrightarrow{PC}$ est parallèle à l'axe Oy.

La corde est de longueur $L = 0.95m$, la vitesse angulaire ω vaut $1.8\pi rad/s$.



$\omega = 1.8\pi\ rad/s$

$L = 0.95\ m$

$m = 22\ kg$

Figure 2: Une masse en P suspendue par une corde est maintenue en mouvement circulaire uniforme de centre C.

1. (1pt) Que vaut le rayon R de ce mouvement circulaire uniforme? Vous pouvez laisser α indéterminé dans votre réponse.

   $R = L \sin\alpha$

2. (1pt) Représenter toutes les forces qui s'exercent sur le corps au point P sur la figure 2.

3. (1pt) Décomposer la force $\vec{T}$ exercée par la corde sur la masse m en fonction de la tension T et de l'angle α. Vous pouvez laisser la tension T et l'angle α indéterminés dans ces formules.

   $\vec{T} = T(0, \sin\alpha, \cos\alpha)$

4. (6pt) Déterminer la valeur numérique de l'angle α et de la tension T. *(Aide: on rappelle que pour un MCU, l'accélération du corps satisfait à une relation bien spécifique.)*

$\vec{F} = m\vec{a}$ avec $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = (0, T\sin\alpha, -mg + T\cos\alpha)$

et $\vec{a} = (0, a, 0)$ où $a = \omega^2 R$ (MCU).

Donc : $\begin{cases} T\sin\alpha = m\omega^2 R \\ -mg + T\cos\alpha = 0 \end{cases}$

or, $R = L\sin\alpha$, donc $\boxed{T = m\omega^2 L}$, et

$T\cos\alpha = mg \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{mg}{T} = \frac{mg}{m\omega^2 L} = \frac{g}{\omega^2 L}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 L}\right)}$

App. num : $T = 668.33\ N$

$\alpha = 70.78°$

5. (1pt) On suppose que si la tension dans la corde dépasse la valeur critique $T_c = 4000N$, la corde cède. Quelle est la valeur maximale $\omega_{\max}$ que peut prendre la vitesse angulaire afin que la corde ne cède pas? Donner la valeur numérique.

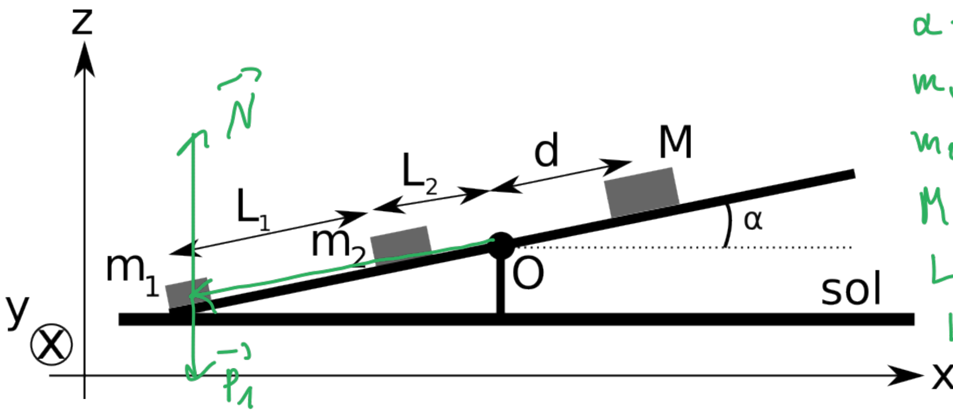
$T_c = m\omega_{max}^2 L \Rightarrow \boxed{\omega_{max} = \sqrt{\frac{T_c}{mL}}}$.

A.N. : $\omega_{max} = 13.83/s = 4.4\pi\ rad/s$.

Question 3: *(14 points)*

On considère une balançoire à bascule formant un angle $\alpha = 13°$ avec l'horizontale schématisée sur la figure 3. Sur la partie basse de la balançoire se trouvent deux corps ponctuels de masses $m_1 = 12kg$ et $m_2 = 16kg$. Son extrémité est en appui sur le sol, et on note $\vec{N}$ la force exercée par le sol sur la balançoire à cet endroit. Sur la partie haute, à une distance $d = 10cm$ du point pivot, se trouve un corps ponctuel de masse $M = 20kg$. L'ensemble du système est immobile.

Dans toute cette question, on vous demande d'utiliser le système d'axes $Oxyz$ de la figure 3, le point O étant pris sur le pivot. De plus, on néglige la masse de la balançoire ainsi que les frottements au point pivot.



$\alpha = 13°$
$m_1 = 12kg$
$m_2 = 16kg$
$M = 20kg$
$L_1 = 0.5m$
$L_2 = 0.07m$
$d = 0.1m$

Figure 3: Les masses m_1 et m_2 sont repérées avec les paramètres L_1 et L_2 comme indiqué ci-dessus, avec $L_1 = 0.5m$ et $L_2 = 7cm$.

1. (6pt) Déterminer les vecteurs moment de force par rapport à O des poids des masses m_1, m_2 et M et de la force normale $\vec{N}$, en laissant N indéterminé dans votre réponse.

$$\vec{\tau}_O(m_1\vec{g}) = (0, -(L_1+L_2)m_1 g\cos\alpha, 0)$$
$$\vec{\tau}_O(m_2\vec{g}) = (0, -L_2 m_2 g\cos\alpha, 0)$$
$$\vec{\tau}_O(M\vec{g}) = (0, dMg\cos\alpha, 0)$$
$$\vec{\tau}_O(\vec{N}) = (0, (L_1+L_2)N\cos\alpha, 0) \qquad (\vec{N} = (0,0,N))$$

2. (3pt) En considérant la condition d'équilibre appropriée, déterminer le vecteur $\vec{N}$. Que vaut la valeur numérique de sa norme?

Equilibre $\Rightarrow \vec{\tau}_O = \vec{0}$ où $\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_O(m_1\vec{g}) + \vec{\tau}_O(m_2\vec{g}) + \vec{\tau}_O(M\vec{g}) + \vec{\tau}_O(\vec{N})$

Donc : $-(L_1+L_2)m_1 g\cos\alpha - L_2 m_2 g\cos\alpha + dMg\cos\alpha + (L_1+L_2)N\cos\alpha = 0$

$$\boxed{\Rightarrow N = g\left(m_1 + \frac{m_2}{1+L_1/L_2} - \frac{d}{L_1+L_2}M\right) = 104.56\,N.}$$

3. (3pt) Que vaut la force $\vec{N}_P$ exercée par le pivot sur la balançoire?

$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{0}$ (équilibre), où

$\vec{F} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + M\vec{g} + \vec{N} + \vec{N}_p$

$\Rightarrow \vec{N}_p = -(m_1 + m_2 + M)\vec{g} - \vec{N}$

$\Rightarrow \vec{N}_p = (0, 0, N_p)$ avec $N_p = (m_1 + m_2 + M)g - N$

$\Rightarrow \boxed{N_p = 375.44\,N}$

4. (2pt) On suppose que nous déplaçons la masse m_1. A quelle valeur de L_1 l'équilibre de ce système est-il rompu?

Equilibre rompu si L_1 est tel que $N = 0$.

Donc : $m_1 + \dfrac{m_2}{1 + L_1/L_2} - \dfrac{d}{L_1 + L_2} M = 0$.

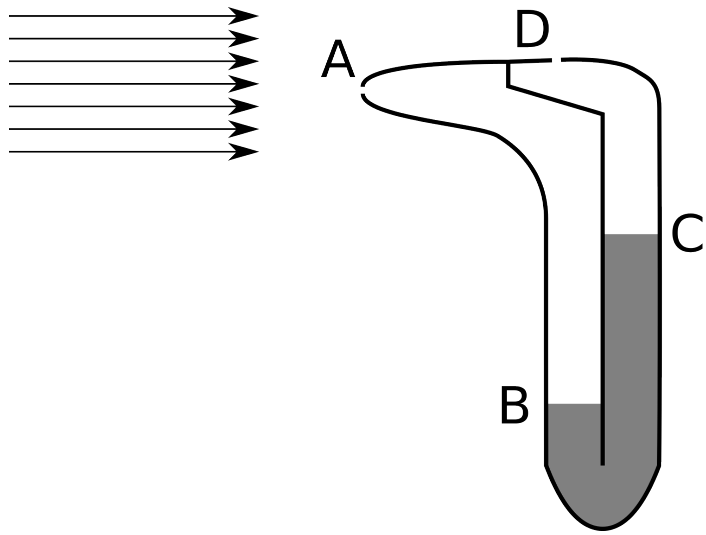
$\Leftrightarrow (L_1 + L_2) m_1 = dM - L_2 m_2$

$\Leftrightarrow \boxed{L_1 = \dfrac{M}{m_1} d - \dfrac{m_2}{m_1} L_2 - L_2}$

$L_1 = 0.003\,m$

Question 4: *(12 points)*

Un tube de Prandtl est un dispositif ingénieux permettant d'estimer la vitesse du vent en exploitant les lois de la dynamique des fluides. Le système est représenté sur la figure 4 et est composé d'un tube en verre dans lequel se trouve de l'eau (masse volumique: ρ_0). Le tube a deux petites ouvertures: l'une située au point A et l'autre au point D. Les points B et C indiquent respectivement la hauteur de l'eau dans la partie gauche et droite du tube. On suppose dans ce problème que le système est dans un état stationnaire, c'est-à-dire que l'écoulement de l'air autour du tube est stationnaire et, par conséquent, les points B et C sont immobiles.



$\Delta h = 5cm = 0.05m$

$\rho_0 = 1000\, kg/m^3$

$\rho_{air} = 1.2\, kg/m^3$

Figure 4: L'air s'écoule de gauche à droite sur cette figure. L'eau, représentée en gris, est immobile dans le tube.

La norme de la vitesse de l'air à mesurer est notée v_D, et correspond à la vitesse au point D. *Remarque*: l'air étant un fluide compressible, les formules vues au cours ne sont pas applicables telles quelles. Afin de permettre la résolution de cette question, nous supposerons ici que l'air est incompressible et on prend $\rho_{\text{air}} = 1.2km/m^3$ pour sa masse volumique. De plus, on accepte sans démonstration que dans ce problème, l'air, si elle est immobile, est à la pression de 1 atmosphère, quelque soit la hauteur.

1. (3pt) Que vallent les normes v_A, v_B et v_C des vitesses en A, B et C ?

Fluides immobiles dans le tube (autrement B et C seraient en mouvement). Donc

$$v_A = v_B = v_C = 0.$$

2. (3pt) On note Δh la différence de hauteur entre B et C (avec $\Delta h > 0$ lorsque C est plus haut que B, comme sur la figure). Que vaut la différence de pression $p_C - p_B$? Exprimer votre réponse en fonction de Δh, et donner également la valeur numérique pour $\Delta h = 5cm$.

Eau immobile => loi de Pascal :

$$p_C - p_B = -\rho_0 g \Delta h = -500 \text{ Pa}$$

3. (1pt) Que vaut la différence de pression $p_A - p_B$?

Pression de l'air immobile est 1 atm, donc $p_A = p_B = 1$ atm, donc $p_A - p_B = 0$.

4. (1pt) Que vaut la différence de pression $p_D - p_C$?

Idem ci-dessus $\Rightarrow$ $p_D - p_C = 0$.

5. (3pt) Déterminer la vitesse v_D en fonction de Δh (donner la formule avec et sans les valeurs numériques).

Bernoulli entre point A et D, sans effet de hauteur $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\rho_{air} v_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho_{air} v_D^2 + p_D$.

Or, $v_A = 0$, d'où $v_D = \sqrt{\frac{2}{\rho_{air}}(p_A - p_D)}$. De plus:

$p_A - p_D = p_A - p_B + p_B - p_C + p_C - p_D = \rho_0 g \Delta h$, donc

$$\boxed{v_D = \sqrt{2g\frac{\rho_0}{\rho_{air}}\Delta h} = 28.87 \text{ m/s}}$$

6. (1pt) Une des limitations de ce système est qu'il ne permet pas de mesurer des vitesses arbitrairement grandes. Décrivez ce qu'il ne passe lorsque la vitesse de l'air en D excède la valeur maximale.

Si v_D augmente, l'aspiration de l'eau vers le point D augmente. Il peut se passer 2 choses:

1). Il y a encore de l'eau dans la colonne de droite, mais l'eau atteint D

2). Il n'y a plus d'eau dans la colonne de droite (on a atteint un Δh maximum), l'eau continue alors à monter à droite.

Dans les 2 cas, de l'eau fini par jaillir en D !