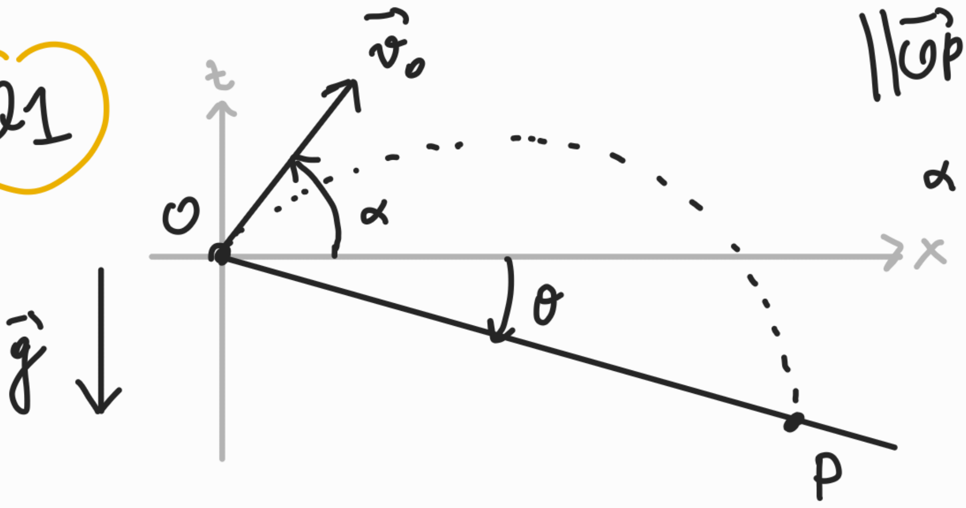
Examen BIME-VETE Bis – Correctif

v4

Janvier 2022

Q1



$\|\vec{OP}\| = L = 9m$

$\alpha = 16°$

$\theta = 18°$

1.) $\vec{OP} = L(\cos\theta, -\sin\theta)$

A.N. : $\vec{OP} = (8{,}56\,m,\ 2{,}78\,m)$

2). $\vec{v}_0 = v_0(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$(\cos\alpha, \sin\alpha) = (0{,}276,\ 0{,}961)$

3). Formule générale :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$$

$\vec{r}_0 = \vec{0}$ par choix de O.

$\vec{g} = (0, -g)$

Donc

$$\vec{r}(t) = \left(v_0 t \cos\alpha,\ v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\right)$$

4). $\vec{r}(t_*) = \vec{OP}$ par définition de t_*.

Donc

$$\begin{cases} v_0 t_* \cos\alpha = L\cos\theta \\ v_0 t_* \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_*^2 = -L\sin\theta \end{cases}$$

5). $t_* = \dfrac{L}{v_0}\dfrac{\cos\theta}{\cos\alpha}$

$$\Rightarrow \cancel{v_0}\left(\frac{L}{\cancel{v_0}}\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{v_0}\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}\right)^2 = -L\sin\theta$$

$$\cancel{L}\cos\theta\tan\alpha - \frac{1}{2} g \frac{L^{\cancel{2}}}{v_0^2}\frac{\cos\theta^2}{\cos\alpha^2} = -\cancel{L}\sin\theta$$

$$\cos\theta\tan\alpha + \sin\theta = \frac{1}{2} g \frac{\cos\theta^2}{\cos\alpha^2}\frac{L}{v_0^2}$$

$$v_0^2 = \frac{1}{2} g \frac{\cos\theta^2}{\cos\alpha^2}\frac{L}{\cos\theta\tan\alpha + \sin\theta}$$

$$v_0^2 = \frac{1}{2} g \frac{\cos\theta}{\cos\alpha^2}\frac{L}{\tan\alpha + \tan\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_0 = \sqrt{\dfrac{1}{2} g \dfrac{\cos\theta}{\cos\alpha^2} \dfrac{L}{\tan\alpha + \tan\theta}} \\ t_* = \dfrac{L}{v_0} \dfrac{\cos\theta}{\cos\alpha} \end{cases}$$

A.N. : $\begin{cases} v_0 = 8{,}70 \text{ m/s} \\ t_* = 1{,}02 \text{ s} \end{cases}$

6). Si $\alpha < -\theta$, alors

$$\tan\alpha = -|\tan\alpha| \quad (\text{car } \alpha < 0)$$

et en plus : $|\tan\alpha| > |\tan\theta| = \tan\theta$,

donc

$$\tan\alpha + \tan\theta < 0.$$

Or on aurait alors $v_0^2 < 0$, ce qui est impossible !

Q2 $M = 420\,000$ kg

$m = 12$ kg $\quad v_i = 420$ km/h.

1). $v_i = 420\,000 \text{ m} / (60 \times 60 \text{ s}) = 116{,}7$ m/s.

2). $$v_{CM} = \frac{1}{M+m}\left(M \underbrace{v_s}_{v_{station}} + m v_i\right)$$

Or la station est immobile par rapport à O (avant l'impact !), donc

$v_{station} = 0.$

$$\Rightarrow \quad v_{CM} = \frac{1}{1 + M/m} v_i$$

A.N. : $\frac{M}{m} = \frac{420 \cdot 10^3}{12} = 3.5\ 10^4$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + M/m} = 2{,}87 \cdot 10^{-5}$$

$$\Rightarrow v_{cm} = 3{,}35 \cdot 10^{-3}\ m/s$$

$$\left(v_{cm} = 0{,}335\ cm/s.\right)$$

3). $p_a = m v_i = 1400\ kg\,m/s.$

4). $p_s = M v_s = 0\ m/s.$

5). $E_c = \frac{1}{2} m v_i^2 + \underbrace{\frac{1}{2} M v_s^2}_{=0}$

$$\Rightarrow E_c = 8{,}17 \cdot 10^4\ J$$

6). Conservation de l'impulsion :

$$p_s' = \underbrace{p_s}_{=0} + p_a$$

$$\Rightarrow (M+m)\, v_s' = m v_i \Rightarrow v_s' = \frac{1}{1+M/m} v_i = v_{cm}.$$

$$\Rightarrow v_s' = 3.35 \cdot 10^{-2}\ m/s.$$

7). $E_c' = \frac{1}{2}(M+m)v_s'^2$

A.N : $E_c' = 235$ J

8). On a

$$E_c = 8{,}17 \cdot 10^4 \text{ J}$$

et

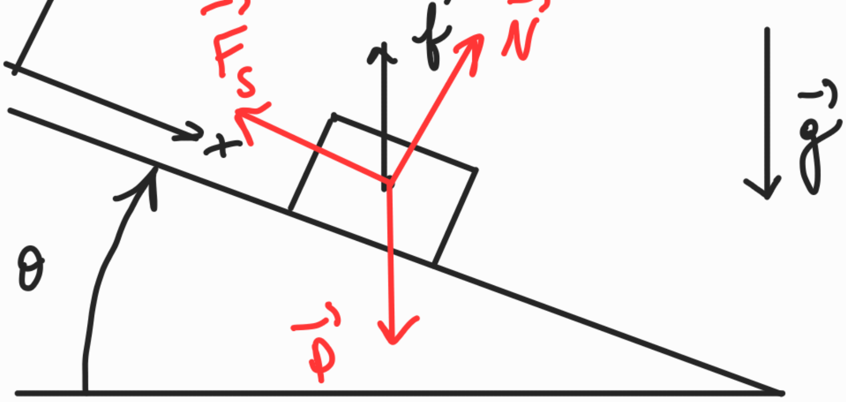
$$E_c' = 235 \text{ J}$$

$\Rightarrow E_c' \neq E_c$: la collision n'est <u>pas</u> élastique.

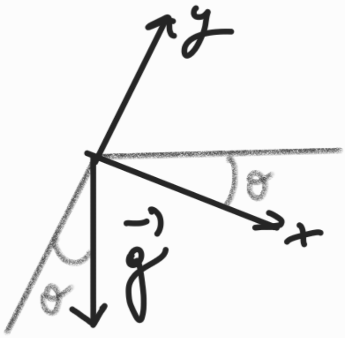
$E_{diss.} = E_c - E_c' = 8{,}15 \cdot 10^4$ J .

Q3 $M = 21\,kg$ $\theta = 19°$ $\mu = 0.6$

$f = 10N.$



1).



$$\vec{g} = g\left(\sin\theta, -\cos\theta\right)$$

A.N. : $\vec{g} = \left(3{,}26\,m/s^2, 9{,}46\,m/s^2\right)$

2). $\vec{f} \,//\, \vec{g}$ mais de sens opposé, donc :

$$\vec{f} = f\left(-\sin\theta, \cos\theta\right)$$

$f = 10N$, donc

$$\vec{f} = \left(-3{,}26\,N, 9{,}46\,N\right).$$

3). Poids : $\vec{P} = M\vec{g}$

Force normale du sol : $\vec{N}$

Force de frottement statiques : $\vec{F_s}$

4). Bloc immobile $\Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0}$.

On a :

$$\begin{cases} \vec{P} = M\vec{g} = Mg\,(\sin\theta, -\cos\theta) \\ \vec{N} = (0, N) \\ \vec{F_s} = -(F_s, 0) \\ \vec{f} = f\,(-\sin\theta, \cos\theta) \end{cases}$$

Donc : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F_s} + \vec{f} = \vec{0}$ donne :

$$\begin{cases} Mg\sin\theta - F_s - f\sin\theta = 0 \\ -Mg\cos\theta + N + f\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_s = (Mg - f)\sin\theta \\ N = (Mg - f)\cos\theta \end{cases}$$

A.N. : $\begin{cases} F_s = 65{,}11\ N \\ N = 189{,}10\ N \end{cases}$

Remarque : on a

$$\mu N = 113,46\ N$$

ce qui est supérieur à F_S, ce qui est cohérent.

5). $\begin{cases} \left(\text{Force réciproque à } \vec{N}\right) = -\vec{N} = (0, -189,10N) \\ \left(\text{Force réciproque à } \vec{F_S}\right) = -\vec{F_S} = (65,11N, 0) \end{cases}$

6). $\begin{cases} \text{Se met à glisser} \Leftrightarrow F_S = \mu N & (1) \\ \text{Se soulève} \Leftrightarrow N = 0. & (2). \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (Mg - f)\sin\theta = \mu\,(Mg - f)\cos\theta$$

Donc f disparaît de cette équation !

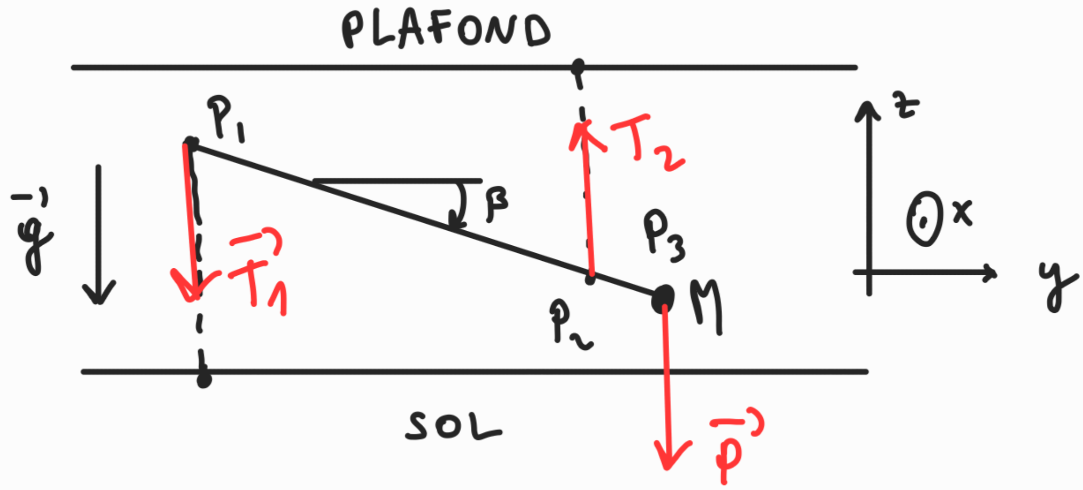
Conclusion : même en augmentant f, le bloc ne se met jamais à glisser.

$$(2) \Leftrightarrow (Mg - f)\cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow f = Mg = P = 210\ N.$$

(Assez intuitif ...).

Q4



$\|\vec{P_1P_2}\| = L = 17$ cm $\qquad M = 4{,}2$ kg.

$\|\vec{P_1P_3}\| = \ell = 29$ cm

1). $\vec{g} = (0, 0, -g) = (0, 0, -10 \text{ m/s}^2)$

2). Poids de M : $\vec{P} = M\vec{g}$

Force exercée par la 1ère corde : $\vec{T_1}$

____________________ 2ème ____ : $\vec{T_2}$

3). $\sum \vec{F} = \vec{0}$, avec

$\vec{T_1} = (0, 0, -T_1) \qquad \vec{T_2} = (0, 0, T_2)$

$M\vec{g} = (0, 0, -Mg)$

$\Rightarrow -T_1 + T_2 - Mg = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 - Mg.$

4). $\vec{\tau}_{P_1}(\vec{T_1}) = \vec{0}$

$$\vec{\tau}_{P_1}(\vec{T_2}) = \overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{T_2} \quad \odot$$

$$= \left(\tau_{P_1}(\vec{T_2}), 0, 0\right)$$

$$\tau_{P_1}(\vec{T_2}) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| T_2 \cos\beta$$

$$= L T_2 \cos\beta$$

$$\vec{\tau}_{P_1}(M\vec{g}) = \overrightarrow{P_1P_3} \times (M\vec{g}) \quad \otimes$$

$$= \left(-\tau_{P_1}(M\vec{g}), 0, 0\right)$$

$$\tau_{P_1}(M\vec{g}) = \ell M g \cos\beta$$

5). Système immobile $\Rightarrow \sum \vec{\tau}_{P_1} = 0$.

Donc

$$L T_2 \cos\beta - \ell M g \cos\beta = 0$$

$$\Rightarrow L T_2 = \ell M g \Rightarrow T_2 = \frac{\ell M g}{L}$$

$$T_1 = T_2 - Mg = \left(\frac{\ell}{L} - 1\right) Mg.$$

A.N. : $\begin{cases} T_2 = 71,65\ N \\ T_1 = 29,65\ N \end{cases}$

6). Il doit aussi valoir $\vec{0}$.

7). On a toujours $T_2 > T_1$, donc la première à se casser est toujours la corde 2. Cela survient si

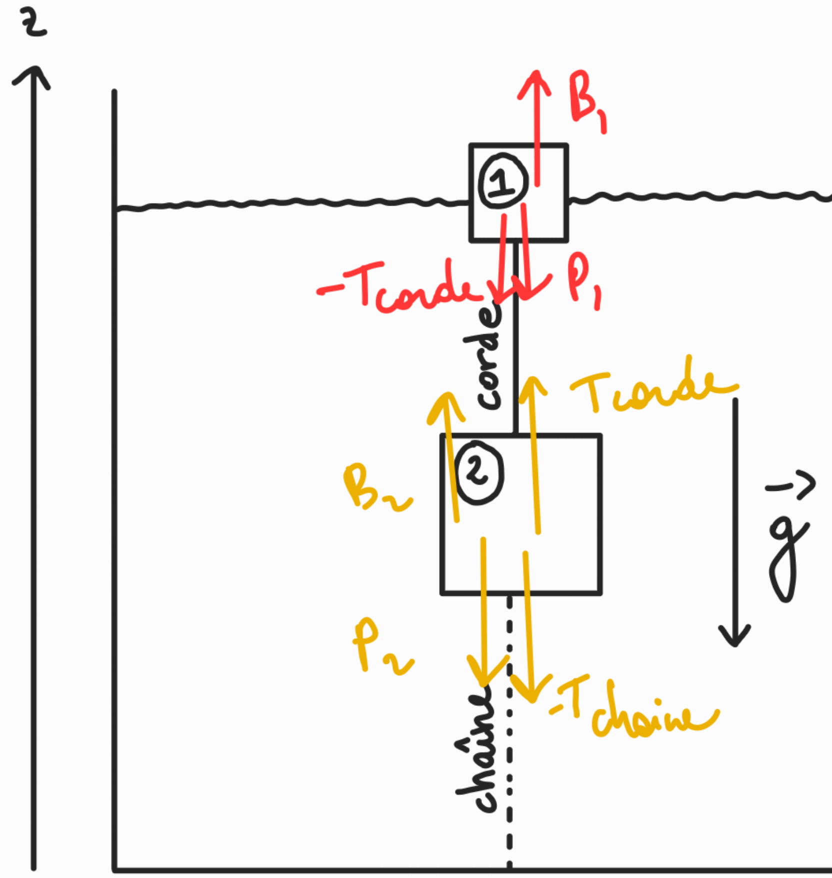
$$T_2 = T_c. \qquad (T_c = 100\ N)$$

Donc

$$\frac{\ell M g}{L} = T_c \iff M = \frac{L T_c}{g \ell}.$$

A.N. : $M = 5,86$ kg.

Q5



$V_1 = 300\ cm^3 = 3.10^{-4}\ m^3$ $\qquad \rho_1 = 90\ kg/m^3$

$V_2 = 400\ cm^3 = 4.10^{-4}\ m^3$ $\qquad \rho_2 = 700\ kg/m^3$

$V_i = 15\%\ V_1$.

1). $M_1 = \rho_1 V_1 = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ kg$

$M_2 = \rho_2 V_2 = 2{,}8 \cdot 10^{-1}\ kg = 0{,}28\ kg$.

2). $\begin{cases} \text{Poids} \quad P_1 = -M_1 g \\ \text{Poussée d'Archimède} \quad B_1 = \rho_0 g V_i > 0 \\ \text{Force de la corde} = -T_{corde} \end{cases}$

3). Equilibre du bloc 1 :

$$P_1 + B_1 - T_{corde} = 0 .$$

$$\Rightarrow T_{corde} = P_1 + B_1 = \rho_0 g V_i - M_1 g$$

$$= g(\rho_0 V_i - M_1)$$

A.N. : $T_{corde} = 10(1000 \cdot 0{,}15 \cdot 3 \cdot 10^{-4} - 2{,}7 \cdot 10^{-2}) N$

$$= 0{,}18 N$$

4). (Voir dessin ; liste assez évidente !).

5). $B_2 + T_{corde} - T_{chaîne} - M_2 g = 0$

$$\Rightarrow T_{chaîne} = B_2 + T_{corde} - M_2 g .$$

$$= \rho_0 g V_2 + g(\rho_0 V_i - M_1) - M_2 g$$

$$= g\left(\rho_0 (V_2 + V_i) - (M_1 + M_2)\right)$$

$$V_2 - V_i = (4 \cdot 10^{-4} + 0.15 \cdot 3 \cdot 10^{-4})\, m^3$$

$$= 4{,}45 \cdot 10^{-4}\, m^3$$

$$\rho_0 (V_2 - V_i) = 0{,}445 \text{ kg}$$

$$M_1 + M_2 = 0{,}307 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow T_{chaine} = 1{,}38 \text{ N}.$$

6). A-t-on seulement brisure d'un des deux lien ?

Regardons le cas extrême, où $V_i = V_1$.

On a alors :

$$T_{corde} = g(\rho_0 V_1 - M_1)$$

$$= 10\left(1000 \cdot 3 \cdot 10^{-4} - 2{,}7 \cdot 10^{-2}\right) \text{N}$$

$$= 2{,}73 \text{ N}$$

$$T_{chaine} = g(\rho_0 V_2 - M_2) + T_{corde}$$

$$= 10 \cdot \left(1000 \cdot 4 \cdot 10^{-4} - 0{,}28\right) \text{N} + 2{,}73 \text{ N}$$

$$= 3{,}93 \text{ N}.$$

Donc même dans ce cas, on est encore loin des valeurs de rupture : on peut tranquillement immerger le bloc 1, rien ne va lâcher.

Q6 $\rho = 950\ kg/m^3$ $v = 0{,}2\ cm/s$.

1). $Q = Av$ $A = \pi R^2$

$\Rightarrow Q = \pi R^2 v$

A.N. : $Q = 2{,}51 \cdot 10^{-6}\ m^3/s$

2). $t = \frac{L}{v} = \frac{12\ cm}{0{,}2\ cm/s} = 60\ s$.

3). $v_A = v$ (incompressible!) $\Rightarrow v_A = 0.2\ cm/s$.

4). Conservation du débit :

$$Q = \pi r^2 v_B \Rightarrow v_B = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} v$$

Or $\frac{R^2}{r^2} = 16$, donc $v_B = 3{,}2\ cm/s$

5). Le rayon n'a pas changé, donc la vitesse est la même qu'en B :

$$v_C = v_B = 3{,}2\ cm/s.$$

6). On utilise le théorème de Bernoulli :

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + p_B$$

Or $h_A = h_B$, donc

$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\rho\left(\frac{R^4}{r^4} - 1\right) v^2$$

$\left(\begin{array}{l} v = 0{,}2 \text{ cm/s} \\ \;\;= 0{,}002 \text{ m/s} \end{array}\right.$

A.N. : $p_A - p_B = 0{,}48$ Pa

(Rem : $p_A - p_B > 0 \iff p_A > p_B$: ok.)

7). Idem ; entre B et C cette fois !

$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + p_B = \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g h_C + p_C$$

$v_B = v_C$, donc $(h_C = H,\ h_B = h)$

$$p_B - p_C = \rho g (H - h)$$

A.N. : $p_B - p_C = 2850$ Pa

(Rem : $p_B > p_C$: ok.)

8). Loi de Pascal :

$$\rho g x = p_A - p_{atm} = 1425 \text{ Pa}$$

$$\Rightarrow p_A = p_{atm} + \rho g x = 102{,}750 \text{ Pa}$$

(il n'y a pas d'écoulement dans la colonne !).