Q1

1. $$\boxed{\vec{g} = (0, -g)}$$

2. $$\boxed{\vec{v}_0 = v_0 (\cos\theta, \sin\theta)}$$

3. $$\vec{r}_B(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2$$

$$\vec{r}_0 = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_B(t) = \left(v_0 t \cos\theta,\ v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} x_B(t) = v_0 t \cos\theta \\ z_B(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}}$$

4. $$\vec{r}_T(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t$$

$$\vec{R}_0 = (d, 0)$$

$$\vec{V}_0 = (V_0, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_T(t) = (d + V_0 t,\ 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_T(t) = d + V_0 t \\ z_T(t) = 0 \end{cases}}$$

5. $\vec{r}_B(t_*) = \vec{r}_T(t_*)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B(t_*) = x_T(t_*) \\ z_B(t_*) = z_B(t_*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_0 t_* \cos\theta = d + V_0 t_* & (1) \\ v_0 t_* \sin\theta - \frac{1}{2} g t_*^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \text{ et } t_* \neq 0 \Rightarrow \boxed{t_* = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}}$$

$$(1) \Rightarrow V_0 = v_0 \cos\theta - \frac{d}{t_*}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 = v_0 \cos\theta - \frac{dg}{2 v_0 \sin\theta}}$$

$$\boxed{x_* = x_B(t_*) = \frac{2 v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}}$$

6. $v_0 = 120\,\mathrm{km/h}$ $\quad \theta = \frac{\pi}{5}$ rad $\quad d = 53\,\mathrm{mm}$

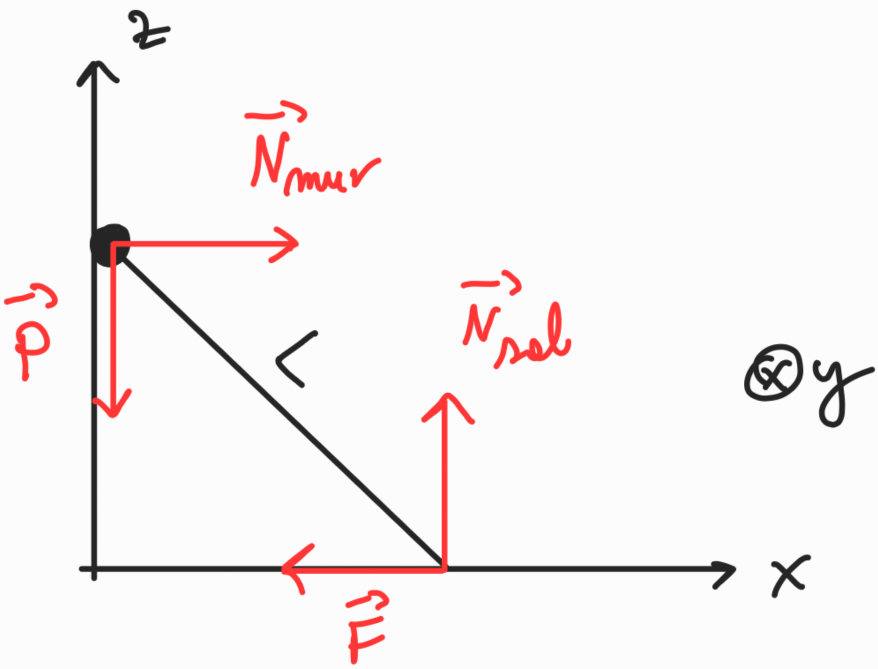
$$\Rightarrow V_0 = \left(\frac{120 \times 1000}{3600} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{0{,}053\,\mathrm{m}\; 10\,\mathrm{m/s^2}}{2\, \frac{120 \times 1000}{3600} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \sin(\pi/5)}$$

$$= 27{,}0 \text{ m/s} - 0{,}0135 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 = 27 \text{ m/s}}$$

Q2

1.



2.

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{P} &= (0,\ 0,\ -P) \\ \vec{N}_{mur} &= (N_{mur},\ 0,\ 0) \\ \vec{N}_{sol} &= (0,\ 0,\ N_{sol}) \\ \vec{F} &= (-F,\ 0,\ 0)\end{aligned}}$$

3. $\sum \overrightarrow{Forces} = m\vec{a} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{N}_{mur} + \vec{N}_{sol} + \vec{F} = \vec{0}$

$\Rightarrow -P + N_{sol} = 0$ & $N_{mu} - F = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} N_{mur} = F \\ N_{sol} = Mg \end{cases}} \quad (\text{car } P = Mg)$$

4. $\boxed{\vec{\tau}_G(\vec{N}_{sol}) = N_{sol} L \cos\alpha \, (0, -1, 0)}$

5. $\boxed{\vec{\tau}_G(\vec{F}) = F L \sin\alpha \, (0, 1, 0)}$

6. $\overrightarrow{\Sigma \text{ moment de force}} = \vec{0}$

$$\Rightarrow N_{sol} L \cos\alpha = F L \sin\alpha$$

$$\Rightarrow F = \frac{N_{sol}}{\tan\alpha} = \frac{Mg}{\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \frac{Mg}{\tan\alpha}}$$

7. On doit avoir $F \leq F_{max} = \mu N_{sol}$.

Donc

$$F \leq \mu N_{sol}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Mg}{\tan\alpha} \leq \mu Mg$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\mu \geqslant \frac{1}{\tan\alpha}}$$

Q3

1. Loi de Pascal : $p_1 + \rho g z_1 = p_2 \rho g z_2$

$\Rightarrow$ donc par rapport à la surface, où la pression est $p_{atm} = 1$ atm :

$$\boxed{p = p_{atm} + \rho g h}$$

2. Aire de contact entre l'eau et le fond de la bassine : A.
Donc, par définition de la pression, la force F est

$$F = p A.$$

$$\Rightarrow \boxed{F = (p_{atm} + \rho g h) A}$$

3. Flotte $\Leftrightarrow \sum \overrightarrow{\text{Forces}} = \vec{0}$.

2 forces opposées : poid et poussée d'Archimède

poid $\hookrightarrow Mg$

poussée d'Archimède $\hookrightarrow \rho g V_i$, où V_i = volume immergé.

On a donc

$$Mg = \rho g V_i \iff M = \rho V_i.$$

Or $V_i \leq V$, donc

$$M \leq \rho V \iff \boxed{\frac{M}{V} \leq \rho}$$

4. Force totale est maintenant force de l'eau + poid du bloc :

$$\boxed{F' = (p_{atm} + \rho g h)A + Mg}$$

5. p' doit être telle que

$$Ap' = F' \iff p' = \frac{F'}{A}.$$

Or $p' = p_{atm} + \rho g(h + \Delta h)$

donc

$$p_{atm} + \rho g h + \rho g \Delta h = \frac{F'}{A} = p_{atm} + \rho g h + \frac{Mg}{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta h = \frac{M}{\rho A}}.$$

6. Le niveau monte à chaque fois que l'on ajoute un bloc.
Mais à un moment, le niveau atteint H, après quoi la bassine déborde. Donc

$$\boxed{p_{max} = p_{atm} + \rho g H}.$$

Q4.

1. Théorème de Bernoulli :

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g_p z_A + p_A$$

$$=$$

$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g_p z_B + p_B$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g_p z_A + p_A - \rho g_p z_B - p_B\right)}$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 + 2 g_p (z_A - z_B) + \frac{2}{\rho}(p_A - p_B)}}$$

2. Condition critique : on veut $v_B > 0$.

Si $g_p = g_{p,max}$, alors $v_B = 0$.

Donc

$$v_A^2 + 2 g_{p,max}(z_A - z_B) + \frac{2}{\rho}(p_A - p_B) = 0$$

$$\Rightarrow g_{P,max} = \frac{1}{2(z_B - z_A)} \left(\frac{2}{\rho} (p_A - p_B) + v_A^2 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{P,max} = \frac{p_A - p_B}{\rho (z_B - z_A)} + \frac{v_A^2}{2(z_B - z_A)}}$$

3. $v_A = 3 m/s$ $\quad p_A = 13{,}3 \text{ kPa}$ $\quad p_B = 9{,}3 \text{ kPa}$

$z_A = 150 \text{ cm}$ $\quad z_B = 180 \text{ cm}$

$\rho = 1056 \text{ kg/m}^3$.

$$\frac{p_A - p_B}{\rho (z_B - z_A)} = \frac{13{,}3 \times 10^3 Pa - 9{,}3 \times 10^3 Pa}{(1056 \text{ kg/m}^3) \times (1{,}8m - 1{,}5m)}$$

$$= \frac{4}{1{,}056 \times 0{,}3} m/s^2 = 12{,}6 \ m/s^2$$

$$\frac{v_A^2}{2(z_B - z_A)} = \frac{(3 m/s)^2}{2 \times 0.3 m} = 15 \ m/s^2$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{P,max} = 27{,}6 \ m/s^2}$$

4. $g_{P,max} = \dfrac{GM}{R^2}$ avec $R = R_T = 6400$ km.

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$.

$$\Rightarrow \quad M = \frac{R_T^2\, g_{P,max}}{G}$$

$$M = \frac{(6{,}4 \times 10^6 m)^2\ 27{,}6\ m/s}{6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2}$$

$$= 169{,}5 \times 10^{12+11}\ kg$$

$$\boxed{M = 1{,}70 \times 10^{25}\ kg}$$

[Réponse alternative avec $g_{P,max} = 30\ m/s^2$:

$M = 1{,}84 \times 10^{25}\ kg$]

5. Viscosité $\longleftrightarrow$ force de frottement dans l'écoulement du sang.

Théorème de Bernoulli : exprime la conservation de l'énergie.

Or en présence de frottements, une partie de l'énergie est dissipée pendant l'écoulement.

Il y a donc moins d'énergie disponible et lorsque le sang monte dans le champ de gravitation, le fluide atteindra $v = 0$ avant d'arriver à la tête si $g_{P,max}$ ne change pas !

Donc si $v = 0$ dans la tête, il faut que $g_{P,max}$ soit plus petit que la valeur obtenue en ignorant les effets de la viscosité.

Conclusion : les effets de la viscosité vont diminuer la valeur de $g_{P,max}$.