Université Libre de Bruxelles

Année Académique 2023-2024 *PHYS-G1103*

Physique appliquée aux sciences de la Vie - Module I *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Sciences Biomédicales et Médecine Vétérinaire

Examen

Second session - août

Correctif

Nom:

Prénom:

Matricule:

Section:

Q1: /10	Q2: /12	Q3: /7	Q4: /13

Instructions: L'usage de documents n'est pas autorisé. L'examen dure 2 heures et 15 minutes. Il y a 4 questions. Vous êtes responsables de vérifier que cet examen comporte bien 10 pages. Vous n'êtes pas autorisés à dégraffer les pages de l'examen. Vous êtes autorisés à utiliser une calculatrice (pas de smartphone). Un aide-mémoire vous est fourni à la fin de ce document. Vous pouvez utiliser les résultats du cours théorique sans démonstration, mais pour le reste justifiez bien toutes vos réponses. Les valeurs numériques peuvent être arrondies au 2e chiffre significatif. Sauf indication contraire, tous les résultats numériques doivent être exprimés dans les unités du Système International. Vous pouvez prendre $g = 10m/s^2$ et $\rho_0 = 1000kg/m^3$.
Lorsqu'il vous est demandé de dessiner une force sur un schéma, on demande que la direction et le sens soient le plus précis possible, mais la norme ne doit pas nécessairement être à l'échelle.
Veuillez répondre à chaque question dans l'espace prévu à cet effet après chaque énoncé. S'il vous manque de la place, vous pouvez faire référence au verso d'une des feuilles d'examen pour indiquer où se trouve votre réponse. Veillez à indiquer *très clairement* si vous recourez à ce système. Enfin, le verso des feuilles d'examen peut-être également utilisé comme brouillon pour vos calculs et raisonnements.
Note finale: Le nombre total de points, sur les 4 questions, s'élève à 42 points. Le nombre de points obtenus est rapporté sur 20, et la note de l'examen est alors obtenue en arrondissant à l'entier le plus proche.

Question 1: *(10 points)*

On considère le problème en 3 dimensions suivant: un petit projectile, de masse m, est tiré depuis un point au sol que l'on note O, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. En utilisant les coordonnées telles que sur la figure 1, le vecteur $\vec{v}_0$ est dans le plan y, z, et on note θ l'angle qu'il fait avec l'axe des y. Un peu plus loin, à une distance d de O le long de l'axe y, passe une ligne de chemin de fer, les rails étant dans le plan x, y et parallèles à l'axe des x. Un train, que nous assimilons à un corps ponctuel, se déplace dans la direction des x croissants avec une vitesse $\vec{V}$ constante. Le projectile est lancé au moment où le train passe au point de coordonnée $x = X_0$ avec $X_0 < 0$.

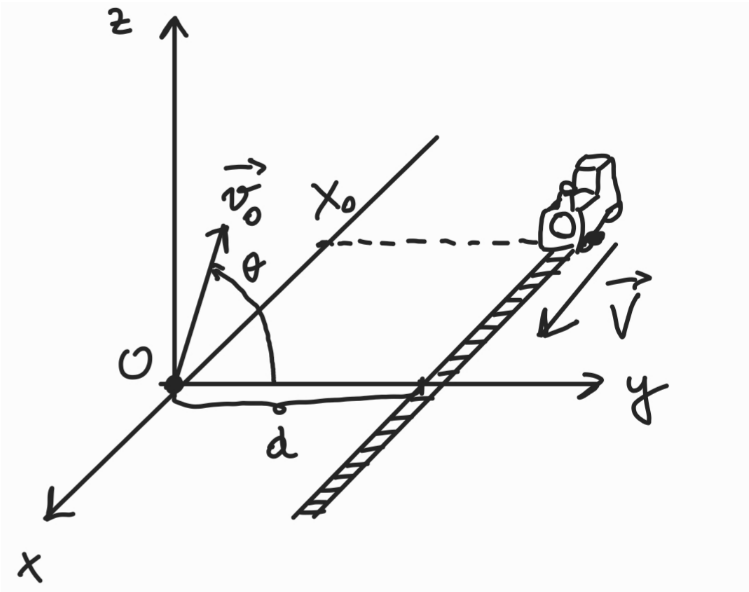

Figure 1: Un projectile est lancé depuis le point O vers un train en mouvement. Les rails sont parallèles à l'axe des x.

On néglige les forces de frottement dans ce problème, et on utilisera les axes x, y et z tels que sur la figure 1. Le but de cette question est de déterminer v_0 et θ de façon à ce que le projectile intercepte le train.

1. (1pt) Exprimer les composantes suivant x, y et z du vecteur d'accélération gravitationnelle $\vec{g}$ en fonction de g.

   $\vec{g} = (0, 0, -g)$

2. (1pt) Exprimer les composantes suivant x, y et z de la vitesse initiale $\vec{v}_0$ en fonction de v_0 et θ.

   $\vec{v}_0 = v_0(0, \cos\theta, \sin\theta)$

3. (1pt) On note $x_{\mathrm{P}}(t)$, $y_{\mathrm{P}}(t)$ et $z_{\mathrm{P}}(t)$ les coordonnées de la position du projectile au temps t. Que valent ces composantes en fonction des paramètres du problème, pour n'importe quelle valeur de t?

   L'expression générale est $\vec{r}_P(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$. Dans notre cas, nous avons $\vec{r}_0 = 0$, et donc en composantes:

$$x_P(t) = 0\,, \qquad y_P(t) = v_0 t\cos\theta\,, \qquad z_P(t) = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

4. (1pt) Même question que ci-dessus, mais avec les coordonnées x_{T}, y_{T} et z_{T} du train.

   La trajectoire du train est un MRU, donc $\vec{r}_T(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}t$. On a de plus $\vec{R}_0 = (X_0, d, 0)$ et $\vec{V} = (V, 0, 0)$, et donc

   $$x_T(t) = X_0 + Vt\,, \qquad y_T(t) = d\,, \qquad z_T(t) = 0\,.$$

5. (4pt) On note $t_\star$ le temps auquel l'impact a lieu. Déterminer $t_\star$, v_0 et θ en fonction de X_0, V, d et g afin que la collision ait lieu.

   Collision: $\vec{r}_P(t_\star) = \vec{r}_T(t_\star)$, donc nous avons les trois équations

   $$0 = X_0 + Vt\,, \qquad v_0 t\cos\theta = d\,, \qquad v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 = 0\,.$$

   Nous trouvons alors $t_\star = -X_0/V$, et en utilisant ce résultat nous avons encore deux équations pour les deux inconnues v_0 et θ:

   $$v_0\cos\theta = \frac{d}{t_\star} = -\frac{dV}{X_0}\,,$$
   $$v_0\sin\theta = -\frac{1}{2}\frac{gX_0}{V}\,.$$

   En prenant la somme des carrés nous trouvons v_0:

   $$v_0 = \sqrt{\left(\frac{dV}{X_0}\right)^2 + \left(\frac{gX_0}{2V}\right)^2}\,.$$

   Enfin, en prenant le rapport des deux équations, nous trouvons la formule suivante pour $\tan\theta$:

   $$\tan\theta = \frac{1}{2}\frac{-gX_0}{V}\frac{-X_0}{dV} = \frac{gX_0^2}{2dV^2}\,,$$

   et donc l'angle θ vaut

   $$\theta = \arctan\frac{gX_0^2}{2dV^2}\,.$$

6. (2pt) Application numérique: calculer v_0 et θ pour $d = 3m$, $V = 10km/h$ et $X_0 = -7m$.

   On trouve

   $$t_\star = 2.5s\,, \qquad v_0 = 12.7m/s\,, \qquad \theta = 84.6^\circ\,.$$

QUESTION 2: *(12 points)*

Un danseur de *breakdance* est en appui sur sa tête, sa main gauche et son genou gauche. Il est immobile et son centre de gravité, noté C_G, est déterminé par le vecteur position suivant:

$$\overrightarrow{OC}_{\mathrm{G}} = (d, \ell, h)\,,$$

où d, ℓ et h sont trois constantes positives. Le point de contact entre la tête et le sol est pris pour origine du système d'axes $Oxyz$. Le point B, qui correspond au point de contact entre le genou et le sol, est sur l'axe Oy à une distance D de O. La main est posée en A, et sa position est donnée par

$$\overrightarrow{OA} = (X, Y, 0)\,,$$

où X et Y sont deux constantes positives.

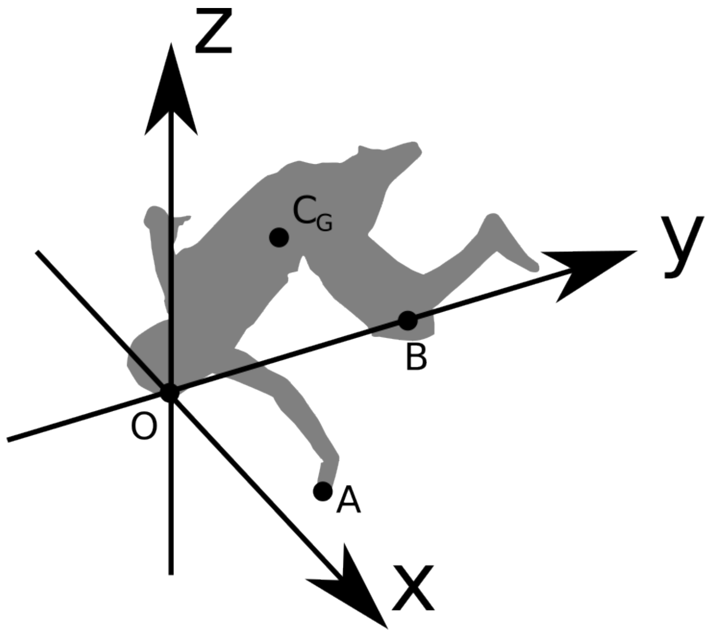

Figure 2: Les seuls points de contact entre le danseur et le sol sont les points O, A et B.

On note $\vec{N}_O, \vec{N}_A$ et $\vec{N}_B$ les forces normales exercées par le sol aux points O, A et B respectivement, et la masse du danseur est notée m. Les normes N_O, N_A et N_B sont inconnues et seront déterminées à la fin du problème.

1. (1pt) Que vaut le vecteur $\vec{N}_O + \vec{N}_A + \vec{N}_B$?

   Nous savons que $\vec{F} = m\vec{a}$ avec $\vec{F} = \vec{N}_O + \vec{N}_A + \vec{N}_B + \vec{P}$ et $\vec{a} = 0$, donc

   $$\vec{N}_O + \vec{N}_A + \vec{N}_B = -\vec{P} = (0, 0, mg)\,.$$

2. (2pt) Que vaut le moment de force par rapport à O de $\vec{N}_B$?

   $\vec{\tau}_0(\vec{N}_B) = \overrightarrow{OB} \times \vec{N}_B = (0, D, 0) \times (0, 0, N_B) = (DN_B, 0, 0)$.

3. (2pt) Que vaut le moment de force par rapport à O de N_A?

   $\vec{\tau}_O(\vec{N}_A) = \overrightarrow{OA} \times \vec{N}_A = (X, Y, 0) \times (0, 0, N_A) = (YN_A, -XN_A, 0)$.

4. (2pt) Que vaut le moment de force par rapport à O du poids du danseur?

   $\vec{\tau}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OC_G} \times \vec{P} = (d, \ell, h) \times (0, 0, -mg) = (-\ell mg, dmg, 0)$.

5. (3pt) Déterminer les normes des forces normales en fonction des paramètres du problème.

   Le système étant à l'équilibre, il n'y a pas d'accélération angulaire, et donc le moment de force total par rapport à O est nul: $\vec{\tau}_O = 0$. Le moment de force par rapport à O de $\vec{N}_O$ étant nul, le moment total est $\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_O(\vec{N}_A) + \vec{\tau}_O(\vec{N}_B) + \vec{\tau}_O(\vec{P})$. Avec les résultats des questions précédentes nous trouvons donc les conditions suivantes:

   $$DN_B + YN_A - \ell mg = 0 \qquad -XN_A + dmg = 0\,.$$

   Nous résolvons ces équations pour N_A et N_B:

   $$N_A = \frac{d}{X}mg \qquad \text{et} \quad N_B = \frac{\ell}{D}mg - \frac{Y}{D}\left(\frac{d}{X}mg\right) = mg\left(\frac{\ell}{D} - \frac{dY}{DX}\right)\,.$$

   Afin de trouver N_O, nous utilisons le résultat de la question 1., selon lequel nous devons avoir $N_O = mg - N_A - N_B$, c'est-à-dire

   $$N_O = mg\left(1 - \frac{d}{X} - \frac{\ell}{D} + \frac{dY}{DX}\right)\,.$$

6. (2pt) On suppose à présent que le danseur parvient à soulever son genou et à rester en équilibre sur sa tête et sa main. Que doit valoir ℓ pour que cela soit possible? Exprimer votre réponse en fonction de X, Y et d.

   Si le genoux n'est plus en contact avec le sol, alors N_B est nul. Ceci donne une équation pour ℓ:

   $$\frac{\ell}{D} = \frac{dY}{DX} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \ell = \frac{Yd}{X}\,.$$

Question 3: *(7 points)*

On considère un cylindre de masse m, hauteur h et rayon r, immergé dans l'eau et attaché au centre P de sa face inférieure à un ressort de constante de rappel k. Le ressort, à son autre extrêmité, est fixé au fond du contenant au point O. On note H le niveau de l'eau et P_0 la position d'équilibre du ressort. Dans la première partie de ce problème, on suppose que le cylindre est totalement immergé, et dans la deuxième partie il ne l'est que partiellement et on note h_i la hauteur immergée du cylindre, voir figure 3 pour un récapitulatif. On suppose de plus que m/V est plus petit que la masse volumique de l'eau, où V est le volume du cylindre.

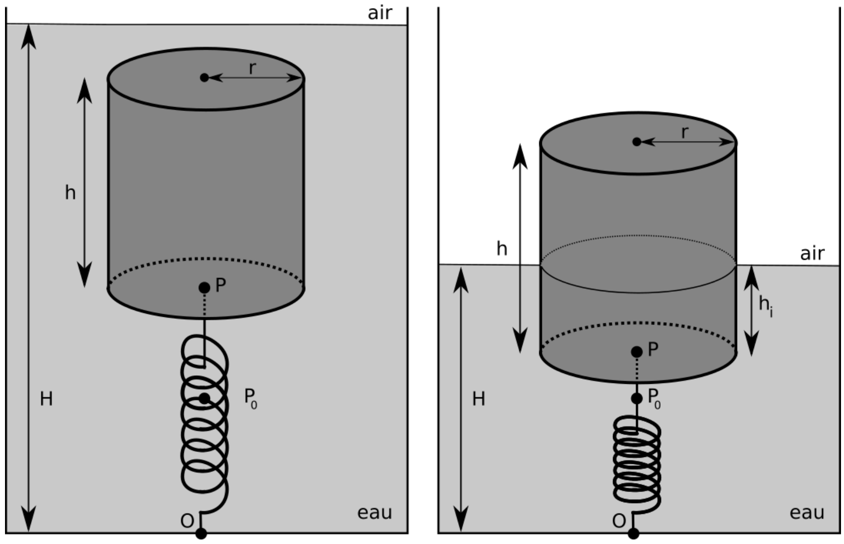

Figure 3: Un cylindre est immergé dans l'eau et attaché par le bas à un ressort. A gauche, il est totalement immergé et à droite il ne l'est que partiellement.

Afin de rendre les notations plus digestes, on pose $e = ||\overrightarrow{P_0P}||$ et $\ell = ||\overrightarrow{OP_0}||$.

Première partie: cylindre totalement immergé

1. (2pt) En utlisant la condition d'équilibre appropriée, déterminer l'élongation e du ressort en fonction des paramètres du problème.

   Comme nous avons $\vec{F} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = 0$ car le système est immobile, nous devons avoir $\vec{F} = 0$. La force total est donnée par $\vec{F} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{A}$, avec $\vec{R} = -k\overrightarrow{P_0P}$, $\vec{P} = m\vec{g}$, $\vec{A} = -\rho_0 V\vec{g}$. Etant donné que le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ est dirigé vers le haut, la force de rappel $\vec{R}$ est dirigée vers le bas, et nous avons donc

   $$ke + mg - \rho_0 gV = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e = \frac{g}{k}(\rho_0 V - m) .$$

2. (1pt) L'élongation e étant une norme, elle doit être toujours positive. Pourquoi ceci est-il vrai pour la formule trouvée au point précédent?

   Nous devons vérifier que nous avons toujours $e \geq 0$, ce qui n'est pas tout à fait évident au vu de la valeur trouvée à la question précédente. Nous trouvons que nous devons avoir $\rho_0 V - m > 0$, ce qui revient à demander que

   $$\rho_0 > \frac{m}{V} .$$

   Ceci est explicitement supposé dans l'énoncé, donc nous avons bien $e > 0$.

Deuxième partie: cylindre partiellement immergé

3. (1pt) Exprimer h_i en fonction de H, ℓ et e.

   Nous avons $||\overrightarrow{OP}|| + h_i = H$. Or $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$ avec $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{P_0P}$ tous deux verticaux et orientés vers le haut, donc $||\overrightarrow{OP}|| = \ell + e$. Ainsi nous trouvons

$$h_i = H - ||\overrightarrow{OP}|| = H - \ell - e\,.$$

4. (3pt) Déterminer l'élongation e du ressort en fonction des paramètres du problème.

   Le bilan des forces donne cette fois la condition suivante:

$$ke + mg - \rho_0 g V_i = 0\,,$$

   où V_i est le volume immergé et vaut $V_i = \pi r^2 h_i = \pi r^2 (H - \ell - e)$. On trouve donc l'équation suivante pour e:

$$ke + mg = \rho_0 g \pi r^2 (H - \ell - e)\,.$$

   Le résultat pour e est donc:

$$e = \frac{\rho_0 g \pi r^2 (H - \ell) - mg}{k + \rho_0 g \pi r^2}\,.$$

QUESTION 4: *(13 points)*

Remarque: pour des raisons pédagogiques, cette version diffère légerement de la question présentée lors de l'examen.

Un bloc de masse $m = 40kg$ est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ depuis le point A en haut d'un plan incliné dans la direction du point B. Le long du plan incliné, le bloc subit des forces de frottements, le coefficient de frottement dynamique étant noté μ_d. Une fois arrivé à la fin du plan incliné (au point B), le bloc continue sa glissade sur une surface très glissante, les frottements y étant considérés commes absents.

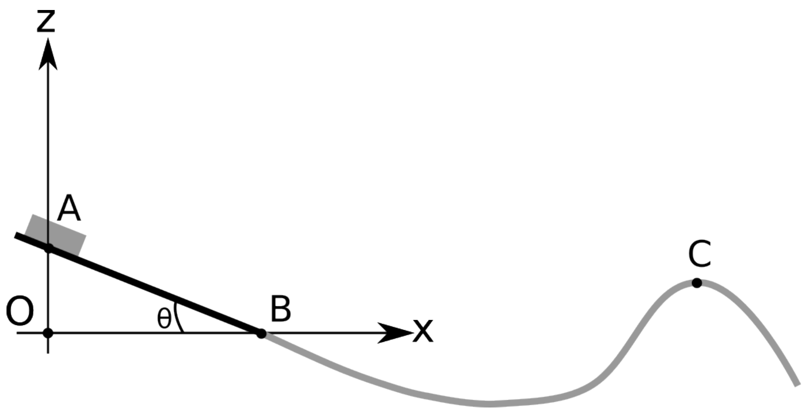

Figure 4: Le bloc part du point A. A partir du point B, il n'y a plus de frottements.

Le bloc est assimilé à un point dans ce problème. Le point A est situé sur l'axe Oz à une hauteur de $h = 5m$ par rapport à O. Le point B est sur l'axe Ox et est à une distance de $L = 8m$ de O. On suppose que le bloc est toujours en contact avec la surface, et la norme de $\vec{v}_0$ vaut $3m/s$.

Dans vos réponses, exprimez vos résultats en fonction des paramètres du problème h, L, g, m et μ_d. Quand vous le pouvez, donner la solution numérique.

1. (1pt) Que vaut l'angle θ entre le plan incliné et l'axe Ox, comme indiqué sur la figure 4?

   Relation de trigonométrie: $\tan\theta = h/L$, donc $\theta = \arctan(h/L) = 32°$

2. (4pt) Déterminer le travail effectué par les forces de frottements lorsque le bloc passe du point A au point B.

   Remarquons d'abord que la force de frottements dynamiques $\vec{F}_\mathrm{d}$ est constante: en effet, sa direction est parallèle au plan incliné (dans le sens de la montée), et sa norme vaut $F_\mathrm{d} = \mu_\mathrm{d} N$ où $N = mg\cos\theta$.
   Ainsi, nous pouvons utiliser la formule vue au cours pour le travail d'une force constante: $W = \vec{F}_\mathrm{d} \cdot \vec{d}$,
   où le vecteur déplacement $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$. Nous trouvons donc

   $$W = -F_\mathrm{d}||\overrightarrow{AB}|| = -mg\mu_\mathrm{d}\cos\theta||\overrightarrow{AB}||\,.$$

   Ceci peut être simplifié car $\cos\theta||\overrightarrow{AB}|| = L$, et donc

   $$W = -mgL\mu_\mathrm{d}\,.$$

3. (5pt) Déterminer la vitesse v_B du bloc lorsqu'il arrive au point B. Quelle est la valeur maximale que peut prendre μ_d pour que cela soit possible?

   Par l'équation du bilan d'énergie, nous savons que $E_B - E_A = W$, où E_A et E_B sont respectivement les énergies mécaniques en A et en B.
   La vitesse initiale étant $\vec{v}_0$, nous avons $E_A = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$, et le point B se trouvant à la même hauteur que O, nous avons $E_B = mv_B^2/2$.
   Ainsi nous avons l'équation suivante pour v_B:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh = -mgL\mu_\mathrm{d}\,.$$

   La solution est

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2g(h - \mu_\mathrm{d}L)}\,.$$

   Nous voyons que ceci n'a de sens que si l'argument sous la racine est positif: on doit donc avoir $v_0^2 + 2g(h - \mu_\mathrm{d}L) > 0$, ce qui revient à

$$\mu_\mathrm{d} < \frac{v_0^2}{2gL} + \frac{h}{L}\,.$$

   La valeur maximale pour μ_d est donc 0.681.

4. (2pt) On suppose à présent que $\mu_\mathrm{d} = 0.37$. Calculer numériquement v_B.

   En appliquant la formule ci-dessus, on trouve $v_B = 7.06m/s$

5. (1pt) Quelle est la hauteur maximale z_max que peut avoir le point C pour que le bloc puisse l'atteindre? Donner la valeur numérique.

   Il n'y a pas de frottements entre B et C, donc sur cette partie du trajet l'énergie est conservée: $E_B = E_C$. Si le bloc arrive en C, alors son énergie doit être au moins égale à l'énergie potentielle en C. Dans le cas limite, on doit donc avoir $E_C = mgz_\mathrm{max}$. On trouve donc l'équation pour z_max:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgz_\mathrm{max}$$

   La solution est

$$z_\mathrm{max} = \frac{v_B^2}{2g}\,.$$

   La valeur numérique est $z_\mathrm{max} = 2.49m$.

Aide-mémoire

$$\rho_0 = 1000 kg/m^3 \qquad \|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad 1\text{atm} = 101325\text{Pa}$$

$$g = 10 m/s^2 \qquad \frac{\mathrm{d}\sin(ax)}{\mathrm{d}x} = a\cos(ax) \qquad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p \qquad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \vec{a}_{\mathrm{c}} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \qquad \|\vec{A} \times \vec{B}\| = AB\sin\theta \qquad v = \omega r$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{adjacent}}{H} \qquad F_{\mathrm{s}}^{\max} = \mu N \qquad Q = Av$$

$$E_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}kr^2 \qquad E_{\mathrm{P}} = -m\vec{g} \cdot \vec{r} \qquad W = \vec{f} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$A = \pi R^2 \qquad \Delta E_{\mathrm{c}} = W_{\mathrm{tot.}}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$