Université Libre de Bruxelles

Année Académique 2023-2024 *PHYS-G1103*

Physique appliquée aux sciences de la Vie - Module I *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Sciences Biomédicales et Médecine Vétérinaire

Examen

Janvier

Correctif

Nom:

Prénom:

Matricule:

Section:

Q1: /9	Q2: /10	Q3: /11	Q4: /15	Q5: /14

Instructions: L'usage de documents n'est pas autorisé. L'examen dure 3 heures. Il y a 5 questions. Vous êtes responsables de vérifier que cet examen comporte bien 12 pages. Vous n'êtes pas autorisés à dégraffer les pages de l'examen. Vous êtes autorisés à utiliser une calculatrice (pas de smartphone). Un aide-mémoire vous est fourni à la fin de ce document. Vous pouvez utiliser les résultats du cours théorique sans démonstration, mais pour le reste justifiez bien toutes vos réponses. Les valeurs numériques peuvent être arrondies au 2e chiffre significatif. Sauf indication contraire, tous les résultats numériques doivent être exprimés dans les unités du Système International. Vous pouvez prendre $g = 10m/s^2$ et $\rho_0 = 1000kg/m^3$.
Lorsqu'il vous est demandé de dessiner une force sur un schéma, on demande que la direction et le sens soient le plus précis possible, mais la norme ne doit pas nécessairement être à l'échelle.
Veuillez répondre à chaque question dans l'espace prévu à cet effet après chaque énoncé. S'il vous manque de la place, vous pouvez faire référence au verso d'une des feuilles d'examen pour indiquer où se trouve votre réponse. Veillez à indiquer *très clairement* si vous recourez à ce système. Enfin, le verso des feuilles d'examen peut-être également utilisé comme brouillon pour vos calculs et raisonnements.
Note finale: Le nombre total de points, sur les 5 questions, s'élève à 59 points. Le nombre de points obtenus est rapporté sur 20, et la note de l'examen est alors obtenue en arrondissant à l'entier le plus proche.

Question 1: *(9 points)*

On considère deux projectiles lancés à des moments différents depuis les points O et A représentés sur la figure 1. Le premier projectile part au moment $t = 0s$ avec une vitesse $\vec{v}_1$. Au temps $t = 0.1s$, le second projectile est lancé avec une vitesse $\vec{v}_2$. Les deux projectiles atteignent en même temps un point B situé au niveau du sol.

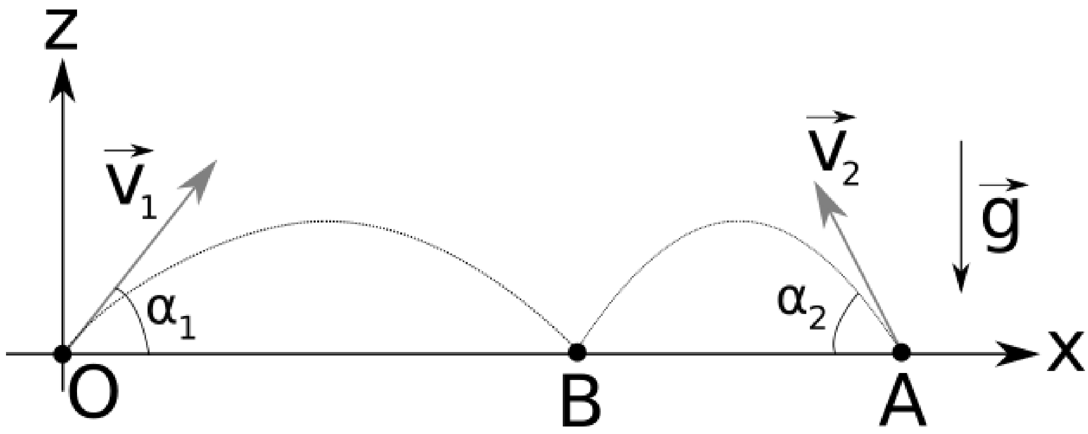

Figure 1: Le corps de droite est lancé 0.1 seconde après le corps de gauche, et ils arrivent en même temps au point B.

On donne $\alpha_1 = 12°$, $\overrightarrow{OA} = (L, 0)$ et $\overrightarrow{OB} = (d, 0)$ avec $L = 178cm$ et $d = 0.99m$. On demande d'utiliser le système d'axes Oxz dans toute cette question et on note $t_\star$ l'instant correspondant à l'impact avec le point B.

1. (1pt) Donner les composantes du vecteur d'accélération gravitationnelle $\vec{g}$.

$\vec{g} = (0, -g) \qquad g = 10\, m/s^2$

2. (2pt) Exprimer les composantes de $\vec{v}_1$ et de $\vec{v}_2$ en fonction de leurs normes et de α_1 et α_2 (vous pouvez laisser α_1 dans votre réponse sans le remplacer par sa valeur numérique).

$\vec{v}_1 = v_1 (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1)$

$\vec{v}_2 = v_2 (-\cos \alpha_2, \sin \alpha_2)$

3. (3pt) Déterminer la valeur que doit prendre v_1 pour que le premier projectile arrive en B. Que vaut le temps $t_\star$ correspondant? Donner les résultats numériques.

$$x_1(t) = v_1 \cos\alpha_1 t \qquad z_1(t) = v_1 \sin\alpha_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = t_* \Rightarrow v_1 \cos\alpha_1 t_* = d \qquad v_1 \sin\alpha_1 t_* - \frac{1}{2} g t_*^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t_* = \frac{2}{g} v_1 \sin\alpha_1$$

$$\hookrightarrow v_1 \cos\alpha_1 = \frac{d}{t_*} = \frac{gd}{2v_1 \sin\alpha_1} \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{gd}{2\sin\alpha_1\cos\alpha_1}} = \sqrt{\frac{gd}{\sin(2\alpha_1)}}$$

$$t_* = \frac{2}{g} \sin\alpha_1 \sqrt{\frac{gd}{2\sin\alpha_1\cos\alpha_1}} = \sqrt{\frac{2d}{g} \operatorname{tg}\alpha_1}$$

$$\Rightarrow v_1 = 4.93\,m/s \qquad t_* = 0.205\ s$$

4. (3pt) Déterminer enfin les valeurs de v_2 et de α_2 et donner les résultats numériques.

$$x_2(t) = L - v_2 \cos\alpha_2 (t_* - t_0) \qquad z_2(t) = v_2 \sin\alpha (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$$

$$t = t_* \Rightarrow \begin{cases} L - v_2 \cos\alpha_2 (t_* - t_0) = d \\ v_2 \sin\alpha_2 (t_* - t_0) - \frac{1}{2} g (t_* - t_0)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v_2 \cos\alpha_2 = \frac{L - d}{t_* - t_0} \quad \& \quad v_2 \sin\alpha_2 = \frac{g(t_* - t_0)}{2}$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \sqrt{\left(\frac{L-d}{t_* - t_0}\right)^2 + \left(\frac{g(t_* - t_0)}{2}\right)^2} \quad \& \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{g}{2} \frac{(t_* - t_0)^2}{L - d}$$

$$\Rightarrow v_2 = 7.54\,m/s \qquad \alpha_2 = 3.99^\circ.$$

$$(L = 1.78\,m \qquad t_* - t_0 = 0.105\,s)$$

Question 2: *(10 points)*

On considère un bloc de masse $m = 42kg$ soutenu par un système à deux poulies comme sur la figure 2. La poulie du dessus est attachée en son centre à la corde 1, fixée à son autre extrêmité au plafond. La corde 2 est tenue par une personne exerçant une force $\vec{f}$. La corde 2 tourne ensuite autour de la poulie du dessus par le dessus, descend jusqu'à la poulie du dessous, tourne autour de celle-ci par le dessous et va finalement se fixer à un crochet fixé à la poulie du dessus.

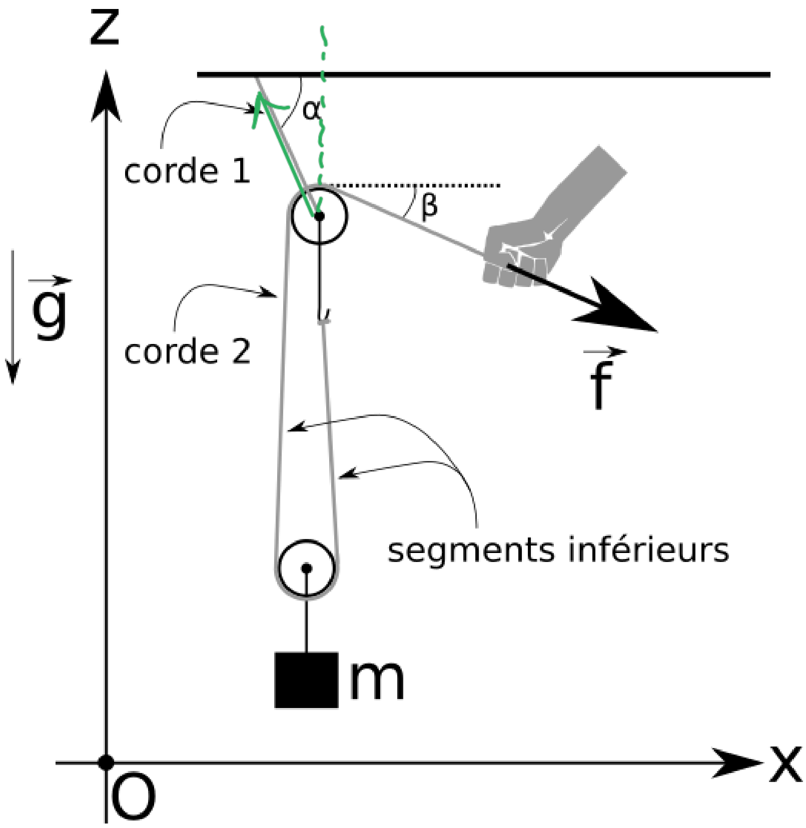

Figure 2: La masse m est immobile, et les angles α et β sont pris par rapport à l'horizontale. Afin de simplifier les calculs, on néglige l'angle que font les segments inférieurs de la corde 2 avec la verticale.

Le système est immobile et les cordes sont tendues. On vous demande d'utiliser le système d'axes Oxz dans cette question, et on note $\vec{T}$ la force exercée par la corde 1 sur la poulie du dessus. L'angle que fait la corde 1 avec l'horizontale est noté α et est inconnu, tandis que l'angle β vaut $21°$. On néglige dans cette question les masses des poulies et des cordes ainsi que les forces de frottements. Enfin, on suppose pour simplifier les calculs que les deux segments inférieurs de la corde 2 sont verticaux.

1. (1pt) Déterminer les composantes de $\vec{f}$ en fonction de β et de la norme f.

$\vec{f} = f(\cos\beta, -\sin\beta)$

2. (1pt) Déterminer les composantes de $\vec{T}$ en fonction de α et de la norme T.

$\vec{T} = T(-\cos\alpha, \sin\alpha)$

3. (3pt) Déterminer la valeur numérique de f.

Tension dans la corde 2 (norme) = f

Equilibre de m $\Rightarrow 2f = mg \Rightarrow f = \frac{1}{2} mg$

$f = 210\ N$

4. (3pt) Déterminer les valeurs numériques de T et α.

Immobilité de la poulie du dessus donne :

$\vec{T} + \vec{f} + m\vec{g} = \vec{0}$

$\Rightarrow -T\cos\alpha + f\cos\beta = 0$ et $T\sin\alpha - f\sin\beta = mg$

$\Rightarrow T\cos\alpha = f\cos\beta = 196\ N \quad T\sin\alpha = mg + f\sin\beta = 495\ N$

$\Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{495N}{196N}\right) = 68.4°$

$T = \sqrt{(196N)^2 + (495N)^2} = 532\ N$

5. (2pt) Déterminer, sans faire d'hypothèse sur la valeur de β, la relation entre l'angle α et β. Que vaut α lorsque $\beta = 0°$?

On a $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{mg + f\sin\beta}{f\cos\beta}$ avec $f = \frac{1}{2} mg$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1 + \frac{1}{2}\sin\beta}{\frac{1}{2}\cos\beta} = \dfrac{2 + \sin\beta}{\cos\beta}$.

Pour $\beta = 0°$: $\operatorname{tg}\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 63.4°$.

QUESTION 3: *(11 points)*

On considère deux blocs reliés par une corde comme sur la figure 3. Le bloc de masse m_1 est attaché à un ressort de constante de rappel k par son côté gauche. La position d'équilibre du ressort à vide (c'est-à-dire si $m_1 = m_2 = 0$) est notée P_0. On note O la position d'équilibre du ressort lorsque les masses sont présentes. On considère les blocs comme étant ponctuels et on néglige les frottements dans ce problème.

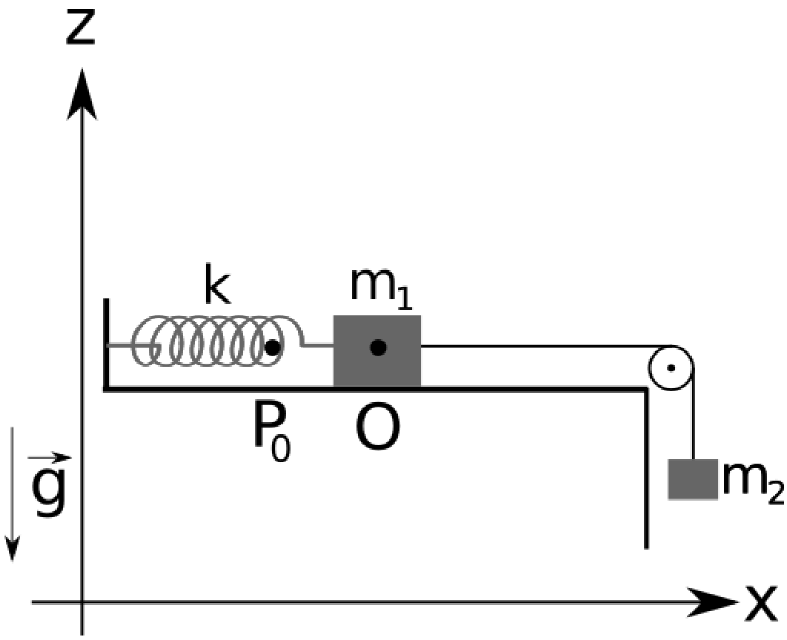

Figure 3: Le système est représenté ici dans sa position d'équilibre, où la position du bloc coïncide avec l'origine O du système d'axes. *Remarque: dans cette figure, l'origine du système d'axes est bien O, mais les axes sont représentés sur le côté de la figure afin de bien distinguer la corde reliant les deux masses.*

Donner toutes vos réponses en fonction des paramètres du problème m_1, m_2, g et k.
On considère d'abord le système à l'équilibre, et on note $T_\star$ la valeur de la tension dans la corde.

1. (1pt) Déterminer la tension à l'équilibre $T_\star$ dans la corde.

Equilibre de $m_2 \Rightarrow T_* = m_2 g$

2. (2pt) Que vaut l'élongation $||\overrightarrow{P_0O}||$?

Forces : Rappel $\vec{R} = -k\overrightarrow{P_0O}$
Corde $\vec{T_*} = (T_*, 0)$
$(\vec{N} + \vec{P} = \vec{0})$

Equilibre $\Rightarrow k||\overrightarrow{P_0O}|| = T_* \Rightarrow ||\overrightarrow{P_0O}|| = \frac{T_*}{k}$

$\left[\text{Avec 1. : } ||\overrightarrow{P_0O}|| = \frac{m_2 g}{k}.\right]$

On met maintenant le système en mouvement, par exemple en relâchant la masse m_2 après l'avoir légèrement tirée vers le bas. La masse m_1 va donc osciller autour de sa position d'équilibre O. On suppose que cela se fait en gardant la corde tendue tout le long du mouvement, et nous verrons à la fin de la question à quelle condition cela est possible. On note T la tension dans la corde.

3. (4pt) En notant x la coordonnée selon l'axe Ox de la position de m_1, déterminer la composante de l'accélération a_x selon le même axe et la tension T en fonction des paramètres du problème et de x. *(Aide: comme la corde est tendue, l'accélération suivant l'axe Oz de m_2 vaut toujours $-a_x$.)*

Corps 1 : $m_1 \vec{a}_1 = m_1 (a_x, 0) = \vec{R} + \vec{T}_1$

où $\vec{T}_1 = (T, 0)$ et $\vec{R} = -k\overrightarrow{P_0P} = -k\overrightarrow{P_0O} - k\overrightarrow{OP}$

$= (-m_2 g - kx, 0)$

Donc $m_1 a_x = -m_2 g - kx + T$

Corps 2: $m_2 \vec{a}_2 = m_2 (0, a_z) = \vec{P} + \vec{T}_2 = (0, -m_2 g + T)$

Donc $m_2 a_z = -m_2 g + T$

$\Rightarrow m_1 a_x = -kx + m_2 a_z$.

Aide $\Rightarrow a_z = -a_x \Rightarrow (m_1 + m_2) a_x = -kx \Rightarrow a_x = -\dfrac{k}{m_1+m_2} x$.

4. (1pt) On vous rappelle que l'équation de l'oscillateur harmonique est

$$a_x = -\omega^2 x \,.$$

Que vaut le paramètre ω pour les oscillations de la masse m_1? (Prenez la valeur positive).

On a donc, par 3.,

$\omega^2 = \dfrac{k}{m_1+m_2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1+m_2}}$.

5. (3pt) En notant A l'amplitude de ces oscillations, quelle est valeur maximale que peut prendre A pour que la corde reste tendue à tout instant?

On veut $T \geq 0$. Par $m_2 a_z = -m_2 g + T$ et $a_z = -a_x$, on trouve $T = m_2(g - a_x)$. Donc on veut $g \geq a_x = -\omega^2 x$. Pour un oscillateur harmonique, x varie de $-A$ à A, donc il faut que

$\omega^2 A \leq g \Leftrightarrow A \leq \dfrac{g}{\omega^2}$ donc $A_{max} = \dfrac{g}{k}(m_1 + m_2)$.

QUESTION 4: *(15 points)*

On considère une louche de masse m posée en équilibre dans une casserole qui contient un liquide incompressible. La cuiller de la louche est vide et est partiellement immergée dans le liquide, et on note A le point d'application de la force d'Archimède. Le manche de la louche est en contact avec le bord de la casserole en un point noté B. Le manche fait un angle θ avec l'horizontale, et on note C_{G} le centre de gravité de la louche. Voir figure 4 pour un récapitulatif.

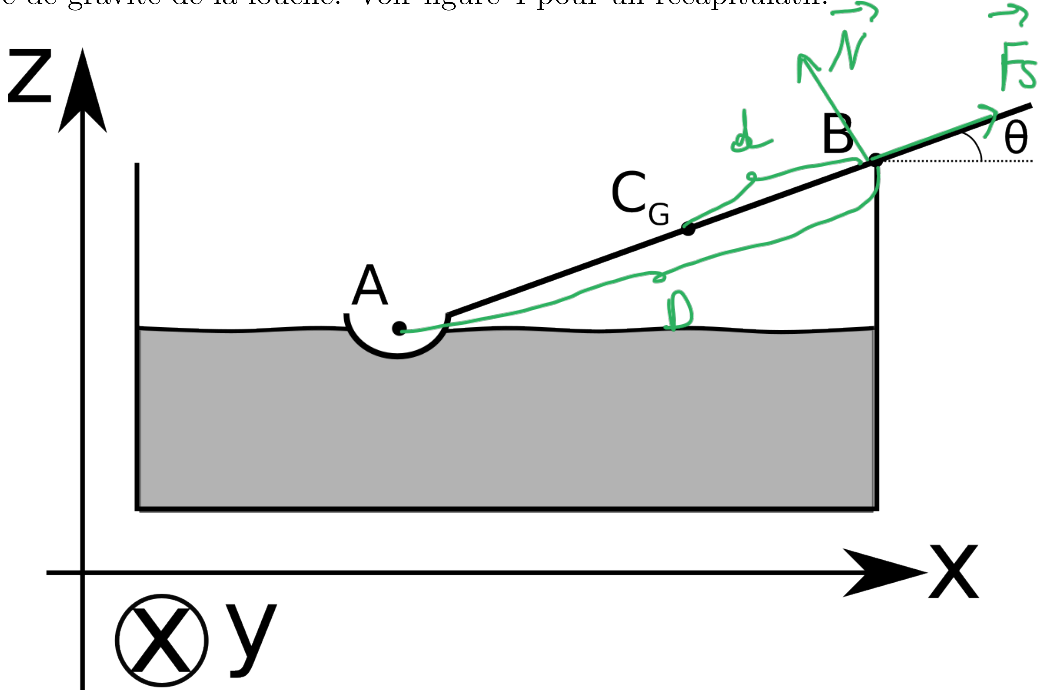

Figure 4: Une louche est posée en équilibre sur le bord d'une casserole. Les points A, B et C_{G} sont sur la même droite.

Pour simplifier les notations, on appelle $D = ||\overrightarrow{AB}||$ et $d = ||\overrightarrow{BC_{\mathrm{G}}}||$. On suppose aussi que les points A, B et C_{G} sont colinéaires, c'est-à-dire qu'ils sont tous sur une même droite. Le coefficient de frottement statique entre le manche et le bord de la casserole est noté μ. On vous demande d'utiliser dans cette question le système d'axes $Oxyz$ de la figure 4. Exprimez tous vos résultats en fonction des paramètres du problème, à savoir m, g, d, D, μ, θ et la masse volumique ρ du liquide.

1. (2pt) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC_{\mathrm{G}}}$.

$$\overrightarrow{BA} = (-D\cos\theta, 0, -D\sin\theta)$$

$$\overrightarrow{BC_G} = (-d\cos\theta, 0, -d\sin\theta)$$

2. (4pt) Déterminer les moments de force par rapport à B du poids de la louche et de la force d'Archimède, en notant V_{i} le volume immergé de la cuiller.

$$\vec{\tau}_B(\vec{P}) = \overrightarrow{BC_G} \times \vec{P} = (-d\cos\theta, 0, -d\sin\theta) \times (0, 0, -mg)$$

$$= (0, -mgd\cos\theta, 0)$$

$$\vec{\tau}_B(\vec{A}) = \overrightarrow{BA} \times \vec{A} = (-D\cos\theta, 0, -D\sin\theta) \times (0, 0, \rho g V_i) = (0, \rho g V_i D\cos\theta, 0)$$

3. (3pt) Que vaut V_i pour que le système soit à l'équilibre?

$\vec{\tau}_B = \vec{0} \Rightarrow \rho g V_i D \cos\theta = mg d \cos\theta$

$\Leftrightarrow V_i = \frac{d}{D} \frac{m}{\rho}$

4. (4pt) Déterminer toutes les forces exercées par la casserole sur le manche de la louche. *(Aide: la force normale est perpendiculaire au manche.)*

$\vec{F_S} = F_S(\cos\theta, 0, \sin\theta)$ $\quad \vec{N} = N(-\sin\theta, 0, \cos\theta)$

$\vec{P} + \vec{A} + \vec{F_S} + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} F_S\cos\theta - N\sin\theta = 0 \\ F_S\sin\theta + N\cos\theta - mg + A = 0 \end{cases}$

Donc $F_S = N \operatorname{tg}\theta$ et $N\frac{\sin\theta^2}{\cos\theta} + N\cos\theta = mg - A$

$\Leftrightarrow \frac{N}{\cos\theta}(\sin\theta^2 + \cos\theta^2) = mg - A \Leftrightarrow N = g\cos\theta(m - \rho V_i)$

et $F_S = g\sin\theta(m - \rho V_i)$.

5. (2pt) A partir d'une certaine valeur critique de l'angle, que l'on note $\theta_\star$, le système n'est plus à l'équilibre et se met à glisser. Déterminer $\theta_\star$.

$F_S \leq \mu N \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta \leq \mu \Leftrightarrow \theta \leq \operatorname{arctg}\mu$.

Donc $\theta_* = \operatorname{arctg}\mu$ est la valeur critique.

Question 5: *(12 points)*

On considère un cube de masse m et de côté a dans une bassine d'eau. Le cube est tenu par une personne par l'intermédiaire d'une corde attachée à son autre extrémité au centre de la face supérieure du cube. La personne remonte le cube en tirant sur la corde, et on suppose que le cube se déplace à vitesse constante. La remontée est décomposée en deux phases: lors de la première phase, le cube reste intégralement immergé. Lors de la seconde phase, le cube est extrait de l'eau. On suppose que les mouvements du cube sont très lents, de sorte que l'on peut négliger les effets dûs aux mouvements de l'eau: on suppose donc que l'on peut toujours la décrire par les lois de l'hydrostatique. Voir figure 5 pour un récapitulatif.

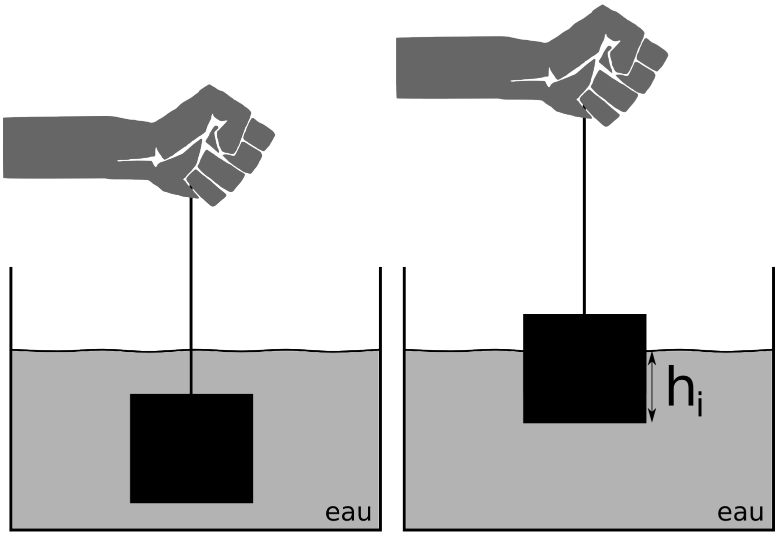

Figure 5: Gauche: le cube est complètement immergé. Droite: on extrait le cube de l'eau.

On note ρ_0 la masse volumique de l'eau. On se concentre d'abord sur la première phase du mouvement, d'une durée Δt.

1. (3pt) Que doit valoir au maximum a pour que la corde soit toujours tendue?

$\vec{P}+\vec{T}+\vec{A}=\vec{0}$ avec $\vec{P}=m\vec{g}$, $\vec{T}$ vers le haut et $\vec{A}=-\rho_0 V\vec{g}$

Donc $T+A=P \Leftrightarrow T=P-A\geq 0 \Leftrightarrow A\leq P \Leftrightarrow \rho_0 V g\leq mg$

Or $V=a^3 \Rightarrow a\leq \sqrt[3]{m/\rho_0}$.

2. (2pt) En notant $\vec{f}$ la force exercée par la personne et v_0 la norme de la vitesse du cube, que vaut le travail W_f associé à cette force? Exprimer le résultat en fonction de m, ρ_0, a, g, v_0 et Δt.

Vitesse constante $\Rightarrow \vec{F}=\vec{0}$. $\vec{P}$ et $\vec{A}$ sont constants, donc $\vec{f}$ est constant $\Rightarrow W_{\vec{f}}=\vec{f}\cdot\vec{d}$ où $\vec{d}$ = vecteur déplacement durant Δt : $\vec{d}=\vec{v}_0\Delta t$. $\vec{f}$ et $\vec{v}_0$ sont parallèles, donc $W_{\vec{f}}=f v_0\Delta t = g(m-\rho_0 a^3)v_0\Delta t$.

3. (2pt) Quelle est la variation d'énergie potentielle ΔE_P du bloc durant cette phase?

$\Delta E_p = mg\Delta h$ avec $\Delta h = v_0\Delta t \Rightarrow \Delta E_p = m g v_0 \Delta t$.

4. (2pt) Que vaut le travail $W_{\vec{A}}$ effectué par la force d'Archimède $\vec{A}$ sur le bloc? Vérifier la cohérence de vos résultats avec l'équation de bilan d'énergie.

Raisonnement similaire à 2. donne

$W_{\vec{A}} = \rho_0 g a^3 v_0 \Delta t$.

Bilan d'énergie : $\Delta E_c = W_{tot}$. Or : $\Delta E_c = 0$ car $v_0 = cst.$,

et $W_{tot} = W_{\vec{f}} + W_{\vec{A}} + W_{\vec{P}} = W_{\vec{f}} + W_{\vec{A}} - \Delta E_p$.

Or : $W_{\vec{f}} + W_{\vec{A}} - \Delta E_p = \cancel{g(m - \rho_0 a^3) v_0 \Delta t + \rho_0 g a^3 v_0 \Delta t - mg v_0 \Delta t}$ $= 0$ OK.

On arrive maintenant à la seconde phase du mouvement. La face supérieure du cube arrive donc à la surface et le bloc va être complètement extrait de l'eau par la personne. On suppose toujours que la force $\vec{f}$ est telle que la vitesse reste constante, et on note h_i la profondeur immergée du cube dans l'eau: h_i vaut donc a au début de l'extraction, et vaut zéro une fois le bloc complètement extrait.

5. (1pt) Exprimer la force $\vec{f}$ en fonction de h_i.

$\vec{F} = \vec{0}$ car vitesse toujours constante, donc

$\vec{f} = -\vec{A} - \vec{P} = (\rho_0 V_i - m)\vec{g} = (\rho_0 a^2 h_i - m)\vec{g}$

6. (2pt) Que vaut la puissance $\mathcal{P}_f$ de la force $\vec{f}$ durant l'extraction?

$\mathcal{P}_{\vec{f}} = \vec{f} \cdot \vec{v_0}$ avec $\vec{f}$ et $\vec{v_0}$ dans le même sens,

donc $\mathcal{P}_{\vec{f}} = f v_0 = (m - \rho_0 a^2 h_i) g v_0$

7. (2pt) Que vaut le travail $W_{\vec{f}}$ effectué par la personne afin de sortir complètement le cube? On suppose pour simplifier que h_i varie dans le temps avec une vitesse égale à $-v_0$. *Aide - vous pouvez utiliser la formule suivante:*

$$\int_0^a x\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}.$$

$$W_{\vec{f}} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}_{\vec{f}}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (m - \rho_0 a^2 h_i) g \underline{v_0 dt}$$

$$= \int_a^0 (m - \rho_0 a^2 h_i) g (-dh_i) = \int_0^a (m - \rho_0 a^2 h_i) g\, dh_i$$

$$= mga - \rho_0 a^2 g \left(\int_0^a h_i dh_i \right) = mga - \rho_0 g \frac{a^4}{2} .$$

$\rho_0 = 1000kg/m^3$	$\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$	$1\text{atm} = 101325\text{Pa}$
$g = 10m/s^2$	$\frac{\mathrm{d}\sin(ax)}{\mathrm{d}x} = a\cos(ax)$	$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$
$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\vec{a}_\mathrm{c} = -\omega^2\vec{r}$
$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$	$\|\vec{A}\times\vec{B}\| = AB\sin\theta$	$v = \omega r$
$\cos\alpha = \frac{\text{adjacent}}{H}$	$F_\mathrm{s}^\mathrm{max} = \mu N$	$Q = Av$
$E_\mathrm{P} = \frac{1}{2}kr^2$	$E_\mathrm{P} = -m\vec{g}\cdot\vec{r}$	$W = \vec{f}\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$
$A = \pi R^2$	$\Delta E_\mathrm{c} = W_\mathrm{tot.}$	

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x)$$