Université Libre de Bruxelles

Année Académique 2024-2025 *PHYS-G1102*

Physique appliquée aux sciences de la Vie *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Médecine et en Sciences Dentaires

Série d'exercice n° 4

Energie et Impulsion

1 Rappels

- **Définition:** l'*énergie cinétique* E_c d'un corps de masse m est définie par la formule

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \,, \tag{1}$$

où v est la norme du vecteur vitesse du corps.

- **Dimensions:** les dimensions de l'énergie cinétique sont ML^2T^{-2}.

- **Définition:** le joule (symbole: J) est l'unité du Système Internationnal pour l'énergie et est défini par

$$1J = 1kg.m^2.s^{-2} \,. \tag{2}$$

- **Définition:** pour n'importe quelle force $\vec{f}$ agissant sur un cors, on définit la *puissance* $\mathcal{P}$ par la formule

$$\mathcal{P} = \vec{v} \cdot \vec{f} \,. \tag{3}$$

- **Remarque:** en toute rigueur, on devrait noter $\mathcal{P}_{\vec{f}}$ afin de rappeler qu'il s'agit de la puissance *associée* à $\vec{f}$, mais en général on note simplement $\mathcal{P}$ pour ne pas trop alourdir les notations.

- **Dimensions:** les dimensions de $\mathcal{P}$ sont ML^2T^{-3}.

- **Définition:** le watt (symbole: W) est l'unité du Système Internationnal pour la puissance et est défini par

$$1W = 1J/s = 1kg.m^2.s^{-3} \,. \tag{4}$$

- **Définition:** pour une force $\vec{f}$ exercée sur un corps et durant un intervalle de temps compris entre t_1 et t_2, on définit le *travail* $W(t_1, t_2)$ par la formule

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} \mathrm{d}t \,. \tag{5}$$

- **Remarque:** à nouveau, il faut garder à l'esprit qu'il s'agit ici du travail *associé à* $\vec{f}$.

- **Propriété:** si, sur l'intervalle de temps compris entre t_1 et t_2, la force $\vec{f}$ est constante, alors
$$W(t_1, t_2) = \vec{f} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\,, \tag{6}$$
où $\vec{r}_1$ (resp. $\vec{r}_2$) est la position du corps en t_1 (resp. t_2). Le vecteur $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ est appelé le vecteur de *déplacement*, et avec cette notation la formule se réduit à $W(t_1, t_2) = \vec{f} \cdot \vec{d}$.

- **Propriété:** si $W_{\mathrm{tot}}(t_1, t_2)$ est le travail associé à la force *totale* s'exerçant sur un corps, on a la formule
$$W_{\mathrm{tot}}(t_1, t_2) = E_{\mathrm{c}}(t_2) - E_{\mathrm{c}}(t_1)\,. \tag{7}$$
C'est l'*équation du bilan d'énergie cinétique.*

- **Définitions:** Pour un corps soumis à une *force conservative* (comme la pesanteur $\vec{P}$ ou la de rappel $\vec{R}$ de constante de rappel k), on définit l'*énergie potentielle* E_{P} par les formules suivantes:
$$\text{cas de la pensanteur: } E_{\mathrm{P}} = -m\vec{g} \cdot \vec{r}\,, \tag{8}$$
$$\text{cas du ressort: } E_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}kr^2\,. \tag{9}$$
Dans ces formules, $\vec{r}$ est le vecteur position et r est sa norme. Pour le cas du ressort, nous avons pris le point de référence O égal au point d'équilibre P_0.

- **Définition:** l'*énergie mécanique* E est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,
$$E = E_{\mathrm{C}} + E_{\mathrm{P}}\,. \tag{10}$$

- **Cas particulier:** pour un ressort de constante de rappel k, et pour un mouvement d'amplitude A, l'énergie mécanique vaut
$$E = \frac{1}{2}kA^2 \qquad \text{(cas du ressort)}\,. \tag{11}$$

- **Propriété:** le travail W_{c} associé à une force conversative est donné par
$$W_{\mathrm{c}}(t_1, t_2) = E_{\mathrm{P}}(t_1) - E_{\mathrm{P}}(t_2)\,. \tag{12}$$

- **Propriété:** si le corps est soumis à des forces conservatives *et* à des forces non-conservatives, alors
$$E(t_2) - E(t_1) = W_{\mathrm{n.c}}(t_1, t_2)\,, \tag{13}$$
où $W_{\mathrm{n.c}}$ est le travail des forces non-conservatives. C'est l'*équation du bilan d'énergie.*

- **Cas particulier:** si le travail des forces non-conservatives est nul, alors l'énergie mécanique totale est conservée dans le temps:
$$E(t_1) = E(t_2)\,. \tag{14}$$

- **Propriété:** pour deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, leur produit scalaire peut être calculé grâce à la formule
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta\,, \tag{15}$$
où θ est l'angle formé par les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et A, B sont les normes de ces vecteurs.

- **Définition:** Pour un corps de masse m et de vitesse $\vec{v}$, on définit l'*impulsion* (aussi appelée *quantité de mouvement)*) $\vec{p}$ par la formule

$$\vec{p} = m\vec{v}\,. \tag{16}$$

  Les dimensions de $\vec{p}$ sont ML/T.

- Si un corps est soumis à une force totale $\vec{F}$ constante durant un intervalle de temps Δt, alors la variation d'impulsion $\Delta\vec{p}$ associée vaut

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t\,. \tag{17}$$

  De façon analogue, si $\vec{F}$ n'est pas constante mais Δt est suffisamment petit, la formule (17) reste valable (en bonne approximation).

- Pour un système à N corps, isolé de toute influence extérieure, l'impulsion totale $\vec{p} = \vec{p}_1 + \cdots + \vec{p}_n$ est une constante. C'est la loi de *conservation de l'impulsion.*

- **Définition:** on dit qu'un collision est *élastique* lorsque l'énergie est conservée par le choc. Dans le cas contraire, on parle de *collision inélastique.*

2 Exercices à préparer

Attention! Ces exercices **ne** seront **pas** corrigés durant la séance, mais les solutions seront disponibles sur l'UV.

1. Que vaut l'énergie cinétique d'un humain de $80kg$ se déplaçant à une vitesse de $10m/s$?
2. Si une pierre est jetée depuis le haut d'un pont, son énergie potentielle va-t-elle diminuer ou augmenter?
3. Si deux vecteurs sont perpendiculaires, que vaut leur produit scalaire?
4. Que vaut l'impulsion p pour une personne de masse $m = 80kg$ et qui court à la vitesse de $v = 10km/h$? Exprimer votre réponse dans les unités du système international.
5. Vrai ou faux? Dans une collision inélastique, l'impulsion totale n'est pas toujours conservée.

3 Exercices

Les exercices marqués d'une étoile sont à résoudre en priorité.

$\star$ 1. **(Ordres de grandeur)** On considère un moteur a explosion d'une puissance $\mathcal{P} = 100kW$.

   a. Quelle énergie est dégagée par le moteur en 1 seconde?

   b. A quelle hauteur pouvons-nous élever une masse de 10 tonnes avec cette énergie? On suppose que 100% de l'énergie produite par le moteur est convertie en énergie gravitationnelle.

   c. Mêmes questions que ci-dessus, mais maintenant pour la puissance de $\mathcal{P} = 1GW$, qui correspond à la puissance du réacteur nucléaire de Doel 4.

2. **(Cinématique et Conservation de l'énergie)** On se propose, dans cet exercice, de revisiter à la lumière du théorème de conservation de l'énergie certains aspects du problème du mouvement parabolique de la série sur la cinématique en deux dimensions.

   On considère un corps ponctuel de masse $m = 42kg$ se mouvant dans le plan Oxz, la seule force agissant sur m étant son poids. Au temps $t = 0s$, le point se trouve sur le point de référence O (placé au niveau du sol), sa vitesse fait un angle $\alpha = 13°$ avec l'horizontale et la norme de sa vitesse vaut $v_0 = 5m/s$. Voir figure 1 pour un récapitulatif.

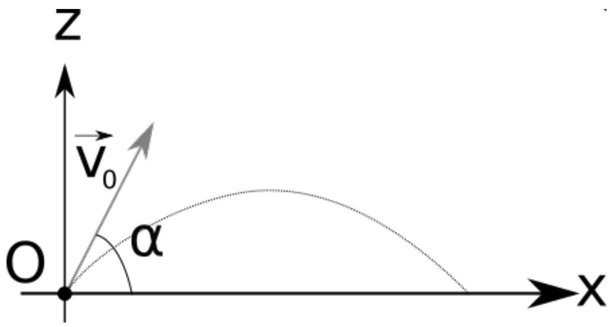

Figure 1: Une trajectoire parabolique dans le plan Oxz.

   a. Que vaut l'énergie cinétique $E_{\mathrm{C}}(t)$ lorsque $t = 0s$?

   b. Que vaut l'énergie potentielle $E_{\mathrm{P}}(t)$ lorsque $t = 0s$?

   c. On note $t_{\max}$ le moment où le corps atteint son altitude maximum. Que vaut l'énergie cinétique $E_{\mathrm{C}}(t_{\max})$?

   d. En utilisant la formule de conservation de l'énergie, déterminer l'énergie potentielle $E_{\mathrm{P}}(t_{\max})$.

   e. Que vaut la hauteur maximum $z_{\max} = z(t_{\max})$?

   f. On note $t_\star$ le moment où le corps retombe au sol. En calculant l'énergie potentielle $E_{\mathrm{P}}(t_\star)$ et en exploitant la conservation de l'énergie, déterminer la norme de sa vitesse $v_\star$ en $t = t_\star$.

   g. Calculer la puisse $\mathcal{P}(t)$ en fonction du temps t.

   h. *(Attention, cette question est sensiblement plus difficile que la moyenne et est facultatif)* En utilisant la formule (5), calculer le travail correspondant à l'intervalle de temps compris entre t_0 et $t_{\max}$. Comparer le résultat obtenu à la variation d'énergie potentielle calculée plus haut sur le même intervalle.

   Afin de rendre cette discussion plus réaliste, on décide maintenant d'inclure les effets des frottements du corps avec l'air. On note $\vec{f}$ la force associée à ces frottements, et la seule hypothèse que nous faisons sur $\vec{f}$ est qu'elle est toujours *opposée* à la vitesse $\vec{v}$ du corps: $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, où λ est un nombre positif.

i. *(Attention, cette question est sensiblement plus difficile que la moyenne et est facultatif)* Dans le cas où $\alpha = \pi/2\, rad$, montrer que la hauteur maximale de la trajectoire est maintenant inférieure à $z_{\max}$.

3. On considère une grue soulevant un bloc de béton de masse $m = 100kg$. Le bloc, que nous assimilons à un corps ponctuel, est initialement au sol, où nous plaçons notre point de référence O. Il est élevé par la grue jusqu'à une hauteur de $h = 15m$. Voir figure 2 pour un récapitulatif. La vitesse du bloc, durant tout le mouvement, est supposée constante et de norme égale à $20cm/s$.

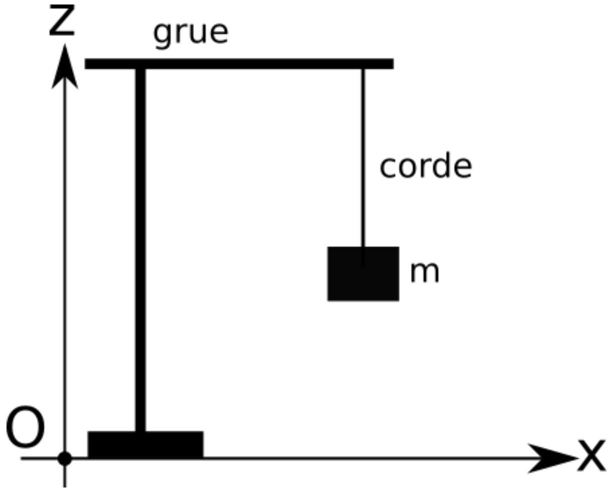

Figure 2: Une grue soulève un bloc de béton à vitesse constante.

a. Que vaut la force $\vec{f}$ exercée par la grue sur le bloc?

b. En utilisant la formule $W = \vec{f} \cdot \vec{d}$, calculez le travail effectué par cette force. Voyez-vous pourquoi nous pouvons utiliser cette formule?

c. Que vaut l'énergie mécanique au début et à la fin du mouvement?

d. Vérifier que les résultats des deux questions précédentes sont cohérents avec la conservation de l'énergie.

4. (Mouvement Circulaire Uniforme et Travail) On considère un corps ponctuel de masse m décrivant un MCU dans le plan Oxy, de rayon R et centré en O. La trajectoire $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ peut donc être représentée par les formules:

$$x(t) = R\cos(\omega t + \theta_0)\ , \tag{18}$$

$$y(t) = R\sin(\omega t + \theta_0)\ , \tag{19}$$

où ω et θ_0 sont des paramètres fixés.

a. Que valent les vecteurs vitesse et accélération pour ce corps?

b. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, calculer la force totale $\vec{F}$ agissant sur m. Exprimer votre réponse en fonction de m, ω et $\vec{r}(t)$.

c. Que vaut la puissance associée à $\vec{F}$?

d. En utilisant la conservation de l'énergie, montrer que la norme de la vitesse doit être constante dans ce mouvement.

e. Calculer la norme de la vitesse en fonction de R et ω. Voyez-vous à quelle étape du calcul la dépendance en t disparait?

⋆ 5. (Pendule) Un pendule simple est un système constitué comme suit: une corde, de masse négligeable et de longueur L, est attachée à l'une de ses extrêmités à un point O, supposé fixe. A l'autre extrêmité de la corde, un corps ponctuel de masse m est attaché. On suppose que la corde est toujours tendue, et le mouvement a lieu dans un plan vertical que nous équipons d'un système d'axe Oxz, voir figure 3. Les forces s'excerçant sur le corps sont son poids $\vec{P}$ ainsi que la tension $\vec{T}$ de la corde. De plus, on note α_0 l'angle initial que fait la corde avec l'axe des z, la vitesse initiale étant nulle.

a. Montrer que la puissance associée à la force de tension est toujours nulle.

b. En utilisant la conservation de l'énergie, déterminer la vitesse $\vec{v}_\star$ lorsque le corps croise l'axe des z. Exprimer votre réponse en fonction de L, g et α_0.

Afin de pimenter un peu le problème, on suppose maintenant qu'un clou est planté sur l'axe des z, en dessous et à une distance d de O (d étant plus petit que L), et ce de façon à modifier la trajectoire du corps comme illustré sur la figure 3.

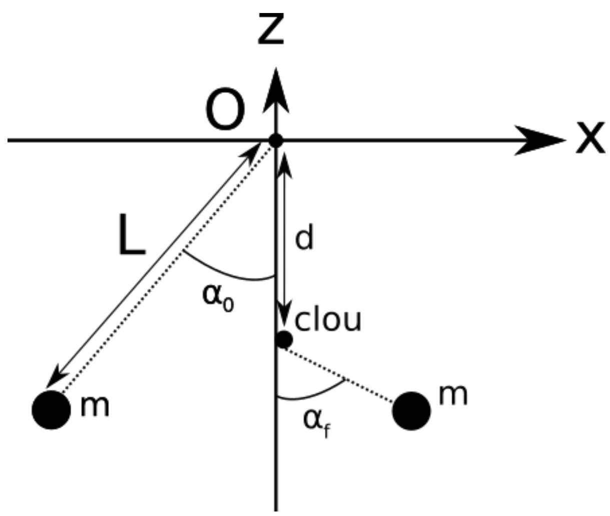

Figure 3: Pour ce pendule asymétrique, le longueur effective de la corde est réduite à $L - d$ lorsque $x > 0$.

c. En notant α_f l'angle maximal fait par le pendule après avoir rencontré le clou, déterminer α_f en fonction de α_0, d et L.

6. (Plan incliné et frottements) On considère un corps ponctuel de masse $m = 12kg$ sur un plan incliné faisant un angle $\theta = 26°$ avec l'horizontale. Une force $\vec{f}$ est appliquée sur le corps, et on suppose que $\vec{f}$ est constante, orientée parallèlement au plan incliné et pointant vers le sens de la montée, et est de norme $f = 150N$. On suppose que la vitesse initiale est nulle.

On note $\mu_\mathrm{c} = 0.1$ le coefficient de frottement cinétique entre le corps et le plan, et on s'intéresse au système après qu'une distance $d = 3m$ soit parcourue. Voir figure 4 pour un récapitulatif.

a. Calculer le travail effectué sur l'entièreté du mouvement par la force $\vec{f}$.

b. Même question que ci-dessus mais pour la force de frottement dynamique $\vec{F}_\mathrm{d}$. Sous quelle forme cette énergie est-elle (probablement) transformée par le système?

c. Que vaut la variation d'énergie potentielle gravitationnelle?

d. Déterminer, en utilisant la conservation de l'énergie, la norme de la vitesse finale v_f du corps.

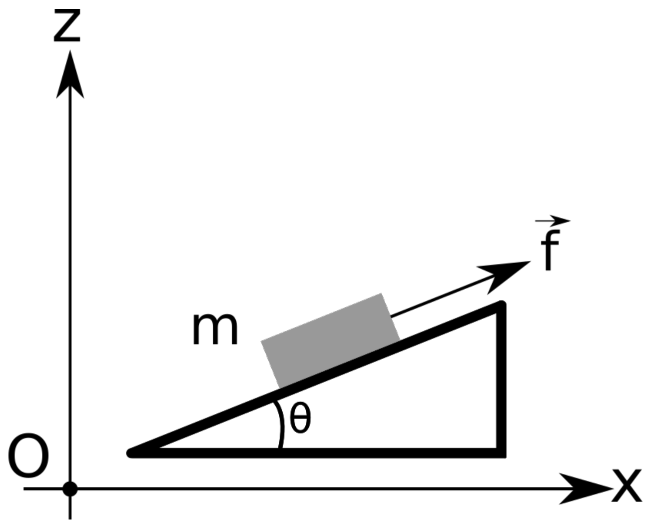

Figure 4: Un corps de masse m, schématisé ici par un bloc, est tiré vers le haut le long d'un plan incliné.

⋆ 7. On considère une boule de billard de masse $m = 200g$ entrant en collision avec un bord du billard. On considère la boule comme un corps ponctuel, et on suppose également que la vitesse initiale est perpendiculaire au bord. Juste avant le contact, sa vitesse est de norme $60cm/s$, et le choc dure un temps $\Delta t = 50ms$. On suppose de plus que la collision est élastique.

Afin de fixer les notations, on note $\vec{v}_{\mathrm{i}}$ ("vitesse initiale") la vitesse juste avant le choc et $\vec{v}_{\mathrm{f}}$ ("vitesse finale") la vitesse juste après le choc. On néglige les effets des frottements dans ce problème. Voir figure 5 pour un récapitulatif, ainsi que le système d'axes à utiliser.

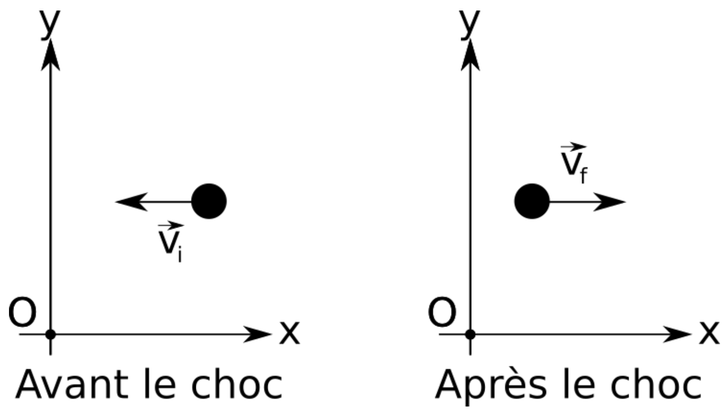

Figure 5: Une boule de billard rebondit sur un bord, représenté par l'axe Oy.

On demande de calculer:

a. La vitesse initiale $\vec{v}_{\mathrm{i}}$.

b. L'impulsion initiale $\vec{p}_{\mathrm{i}}$.

c. L'énergie cinétique initiale E_{C} juste avant le choc.

d. La vitesse finale $\vec{v}_{\mathrm{f}}$ juste après le choc.

e. L'impulsion finale $\vec{p}_{\mathrm{f}}$.

f. La force normale $\vec{N}$ appliquée par le bord sur la boule durant le choc, en supposant que celle-ci est constante sur cet intervalle de temps.

8. La mission Dart orchestrée par la Nasa a permis de tester un système de défense planétaire contre la chute d'éventuels astéroïdes sur Terre. Dans cette mission, la sonde spatiale Dart

est volontairement entrée en collision avec un petit astéroïde nommé Dimorphos. Le transfert d'impulion résultant de cette collision impacte la trajectoire de Dimorphos. Appliqué à un astéroïde géocroiseur (c'est-à-dire dont la Terre se trouve sur sa trajectoire), cette méthode permet en principe de sauver l'humanité!
Les données numériques sont les suivantes: masse de la sonde Dart: $m = 550kg$, vitesse d'impact (en norme, par rapport à Diomorphos): $v_{\rm i} = 23700km/h$, masse de Diomorphos $M = 4.8 \times 10^9 kg$.
On néglige dans cette question les effets de la taille de l'astéroïde Diomorphos (et, a fortiori, de la sonde Dart). On place de plus le point de référence O sur Diomorphos avant l'impact: par définition, Diomorphos est donc immobile avant l'impact. On suppose de plus que lors de la collision, l'impulsion est conservée et que l'état final du système est un corps de masse $m + M$.
Que vaut la vitesse du système après la collision?

9. On considère un corps ponctuel de masse $m_1 = 154g$ entrant en collision avec un autre corps ponctuel de masse $m_2 = 116g$. On suppose que ces deux corps se déplacent dans un monde à une dimension, et on utilise l'axe Ox comme sur la figure 6. Les vitesses initiales du premier et second corps sont de $v_1 = 0$ et $v_2 = -0.49m/s$ respectivement. Après la collision, la vitesse du second corps vaut $v_2' = 0.02m/s$.

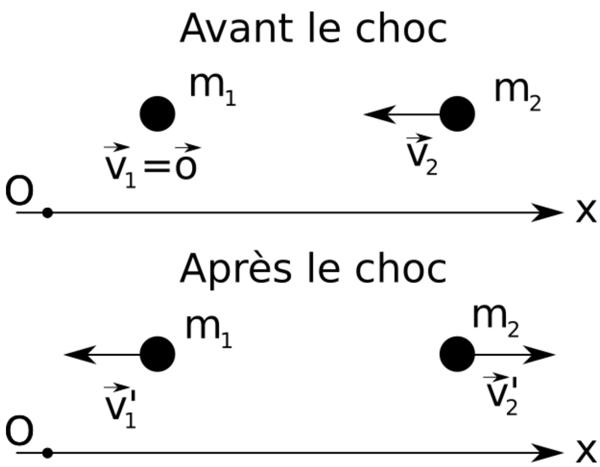

Figure 6: Deux corps ponctuels entrent en collision dans un monde en une dimension.

a. Calculer les impulsions p_1 et p_2 avant la collision, ainsi que l'impulsion totale du système $p = p_1 + p_2$.
b. En utilisant la loi de conservation de l'impulsion, calculer la vitesse v_1' du premier corps après la collision.
c. S'agit-il d'une collision elastique?

⋆ 10. Une voiture de masse $m = 1000\ kg$ roule vers le nord, à une vitesse de norme égale à $20\ m/s$. Elle percute un camion de masse $M = 10000\ kg$ qui se dirige vers le sud, la norme de sa vitesse étant également $20\ m/s$. Immédiatement après le choc, la voiture prend la direction de l'est, la norme de sa vitesse étant alors $v' = 20\ m/s$. On utilise dans cette question le système d'axes tel que sur la figure 7.

a. Quelle est la vitesse du camion immédiatement après le choc ?
b. Quelle est la quantité d'énergie mécanique dissipée au cours de la collision ?

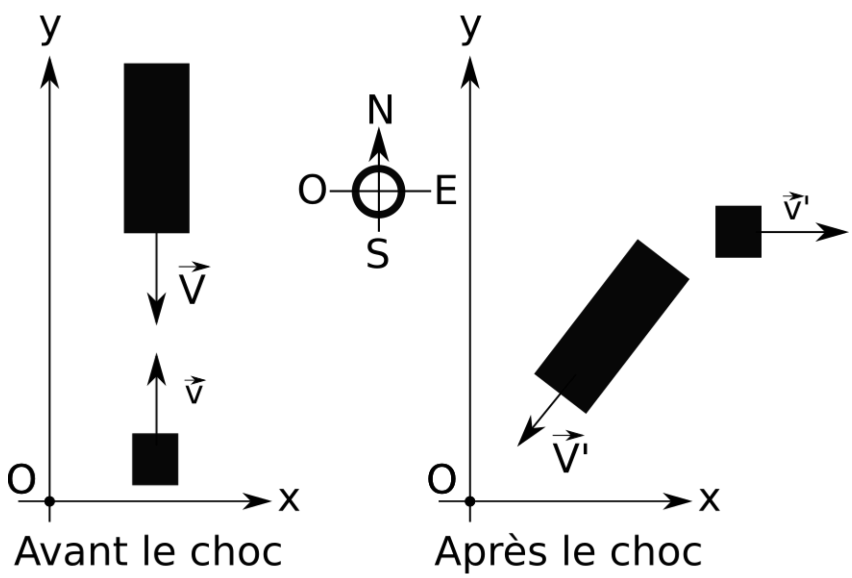

Figure 7: Une voiture entre en collision avec un camion.