

## BA1 en Sciences Biomédicales et Médecine Vétérinaire

## Série d'exercice n° 3

## COORDONÉES CARTÉSIENNES ET VECTEURS

## 1 Rappels

- Nous nous intéressons à un point  $P$  pouvant se déplacer sur un *plan* (“monde à deux dimensions”).
- On utilise alors un point de référence  $O$  et un *système d'axes* pour repérer  $P$  grâce à ses coordonnées.
- **Notation:** pour un point de référence  $O$  et deux axes  $x$  et  $y$ , on note  $Oxy$  le système d'axe correspondant.
- Les axes sont *perpendiculaires* l'un par rapport à l'autre, et les coordonnées du point  $P$  sont définies par *projection orthogonale* (voir figure 1).

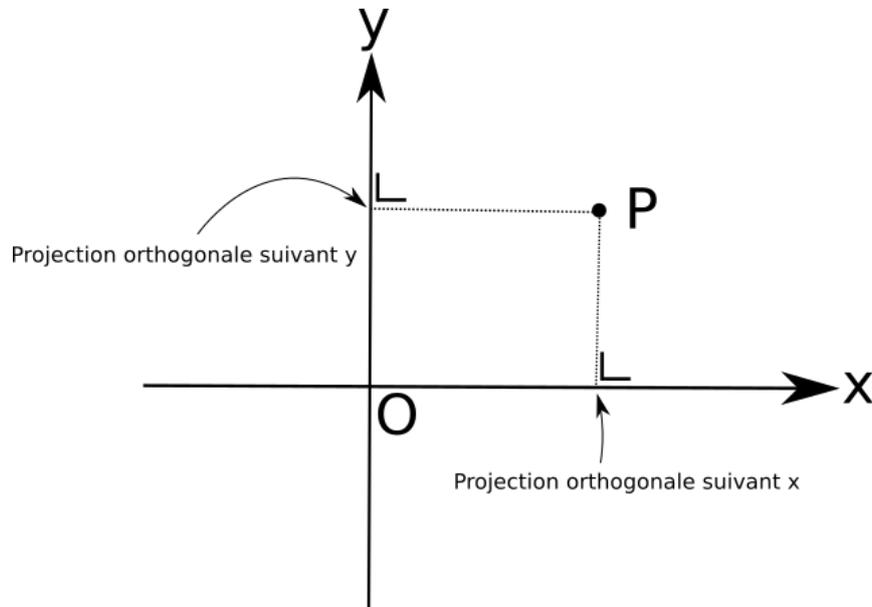


Figure 1: Les coordonnées sont définies par projection orthogonale selon les axes.

- **Définition:** le *vecteur position* est noté  $\overrightarrow{OP}$  et correspond à la *flèche partant du point O et se terminant au point P*. Voir figure 2.

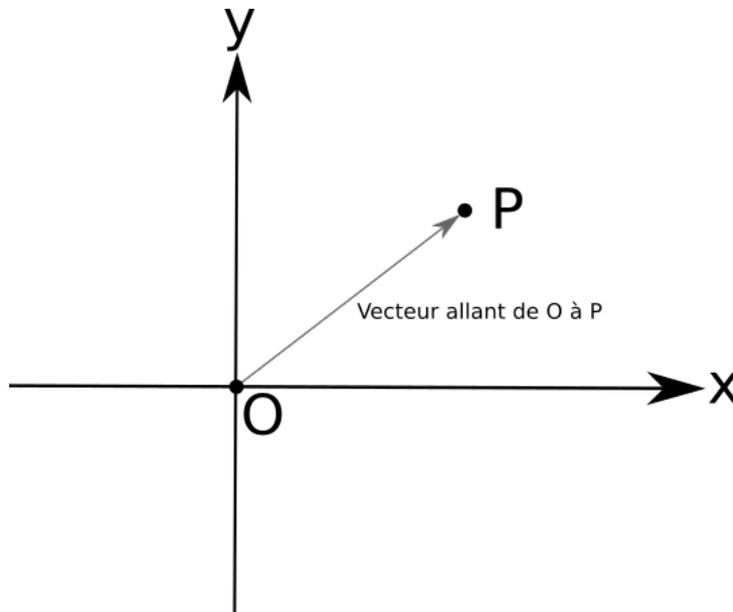


Figure 2: Le vecteur position est la flèche partant du point  $O$  et se terminant sur le point  $P$ .

- **Définition:** De manière générale, un *vecteur* est un concept mathématique correspondant à une *direction* et une *intensité*. Il peut être caractérisé par ses *composantes* suivant un système d'axes donné. On le note **toujours** avec une petite flèche par dessus, comme par exemple pour  $\overrightarrow{OP}$  ou  $\vec{F}$ .

- Le calcul des composantes d'un vecteur est appelé la *décomposition* d'un vecteur. Elle se fait toujours *par rapport à un système d'axes*.

- **Notation:** si un vecteur  $\vec{A}$  a des composantes  $A_x$  et  $A_y$  dans le système d'axe  $Oxy$ , alors on écrit

$$\vec{A} = (A_x, A_y). \quad (1)$$

D'autres notations existent (en colonne par exemple) et sont également acceptées (nous ne faisons pas de différence dans ce cours entre ces notations).

- Nous avons également défini géométriquement les opérations de somme et de multiplication par un nombre quelconque. Ces opérations sont résumées ici en supposant que les vecteurs ont été décomposés:

1. **Somme:** si  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont deux vecteurs, alors le vecteur  $\vec{A} + \vec{B}$  a les composantes  $(A_x + B_x, A_y + B_y)$ .
2. **Multiplication par un nombre:** si  $\vec{A}$  est un vecteur et  $a$  est un nombre réel quelconque, alors le vecteur  $a\vec{A}$  a les composantes  $(aA_x, aA_y)$ .
3. **Norme:** si  $\vec{A}$  est un vecteur de composantes  $(A_x, A_y)$ , alors on définit la *norme* de  $\vec{A}$  par le nombre suivant:

$$\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

On note souvent  $\|\vec{A}\|$  ou même parfois simplement juste  $A$  pour la norme de  $\vec{A}$ .

- **Attention:** un vecteur ne peut *jamais* être "égal" à un nombre réel. On ne peut donc *jamais* écrire quelque chose comme " $\vec{A} = 5$ ". *Cela n'a aucun sens car un vecteur contient plus d'information qu'un nombre réel.*

- Si le point  $P$  se déplace au cours du temps, le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  dépend du temps. Les composantes sont donc des fonctions du temps:  $x(t)$  et  $y(t)$ .

- **Rappel de trigonométrie:** Pour un triangle rectangle comme sur la figure 3, on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 + b^2 & a &= h \cos \alpha \\ \tan \alpha &= b/a & b &= h \sin \alpha \end{aligned}$$

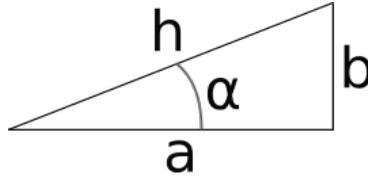


Figure 3: Les relations entre les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $h$  et  $\alpha$  dans un triangle rectangle seront utiles pour décomposer des vecteurs.

## 2 Exercices à préparer

Attention! Ces exercices **ne** seront **pas** corrigés durant la séance, mais les solutions seront disponibles sur l'UV.

1. Que valent les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $P$  de la figure 4?

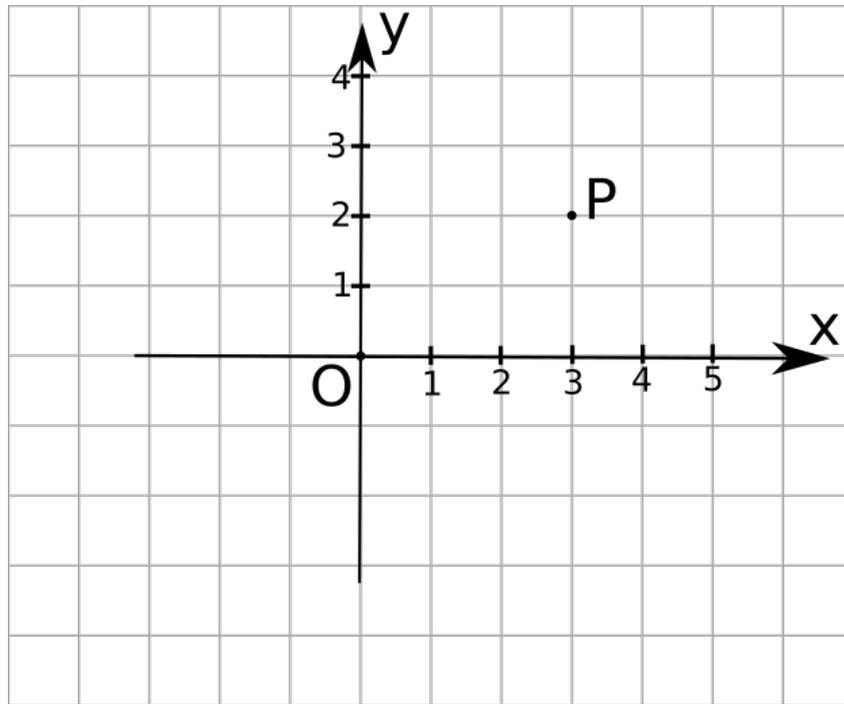


Figure 4: On demande les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $P$ .

2. Que vaut la somme des vecteurs  $(1, 0)$  et  $(-1, -1)$ ?

### 3 Exercices

Les exercices marqués d'une étoile sont à résoudre en priorité.

- ★ 1. On considère le système d'axes  $Oxy$  et les 4 points  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  sur la figure 5.
- Donner les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$  et  $\overrightarrow{OP_4}$ .
  - Que vaut le vecteur  $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_3}$ ? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la base de la flèche au point  $O$ .
  - Que vaut le vecteur  $\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_2}$ ? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point  $O$ .

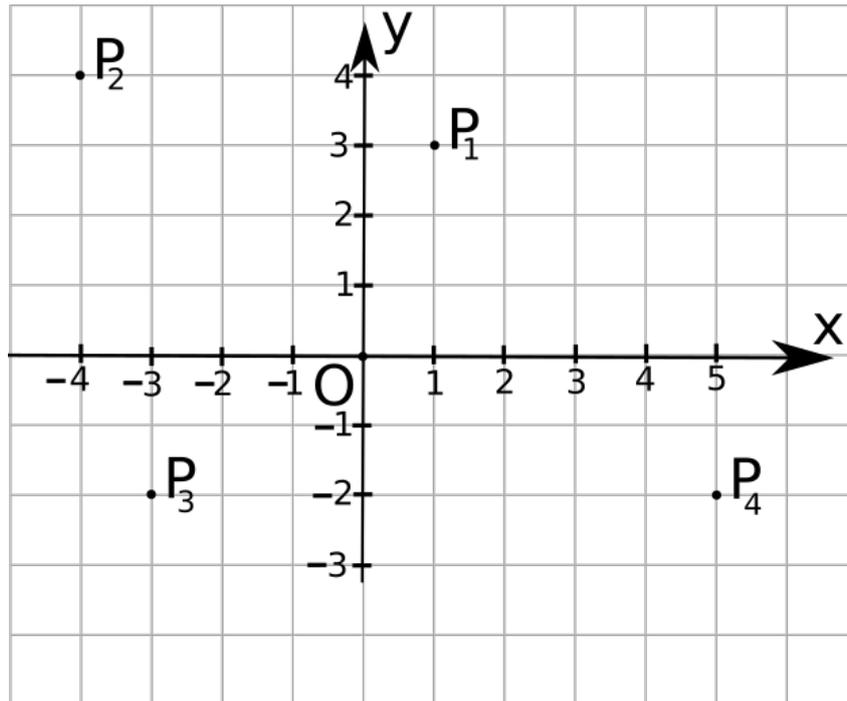


Figure 5: On utilise les coordonnées par rapport au système d'axes  $Oxy$ .

- Soient  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  deux vecteurs comme sur la figure 6.
  - Que valent les composantes de ces vecteurs?
  - Que valent les normes  $A, B$  et  $C$ ?
  - Que vaut la somme  $\vec{A} + \vec{C}$ ? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point  $O$ .
  - Que vaut la différence  $\vec{B} - \vec{A}$ ? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point  $O$ .
  - Calculer la norme des vecteurs  $\vec{A} + \vec{B}$  et  $\vec{A} - \vec{B}$ .
  - Que vaut l'angle que fait  $\vec{C}$  avec l'horizontale et avec la verticale? On rapporte ici les angles à leurs valeurs dans le premier quadrant, c'est-à-dire compris entre 0 et  $\pi/2rad$ .
- ★ 3. On considère un point dont le vecteur de vitesse  $\vec{V}$  est représenté sur la figure 7. On note  $\alpha$  l'angle qu'il fait avec l'horizontale et  $V$  sa norme. Que valent les composantes  $V_x$  et  $V_y$  en fonction de  $\alpha$  et  $V$ ?
- Même question que ci-dessus, mais cette fois le vecteur est donné sur la figure 8 et  $\alpha$  est l'angle pris par rapport à la verticale.

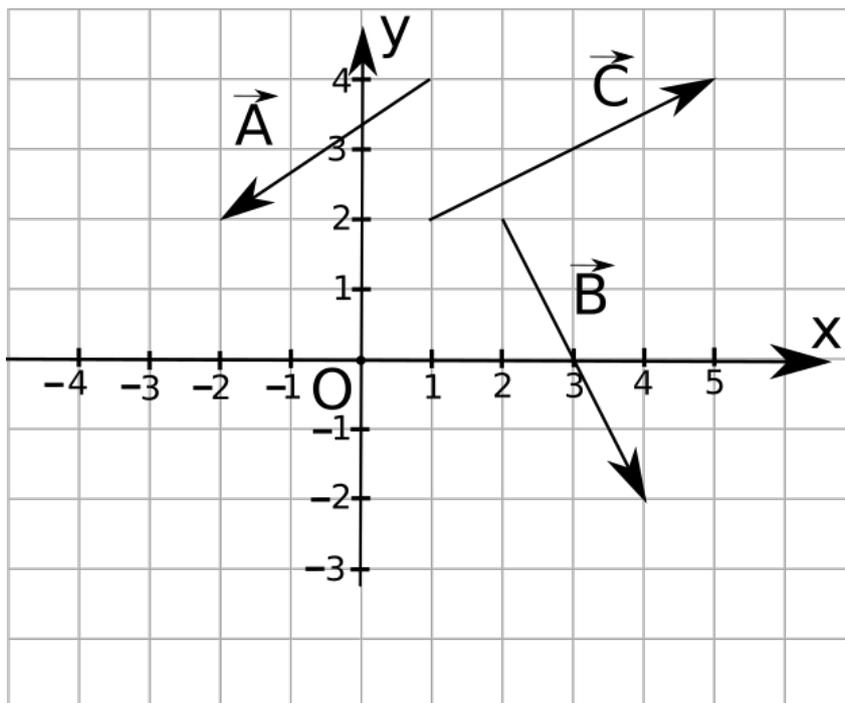


Figure 6: Trois vecteurs à différences angles et différents points de localisation.

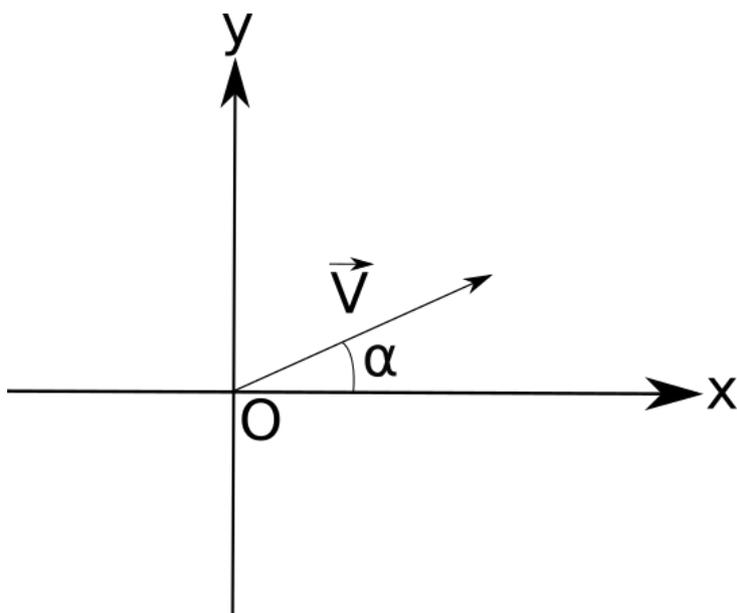


Figure 7: Le vecteur  $\vec{V}$  fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.

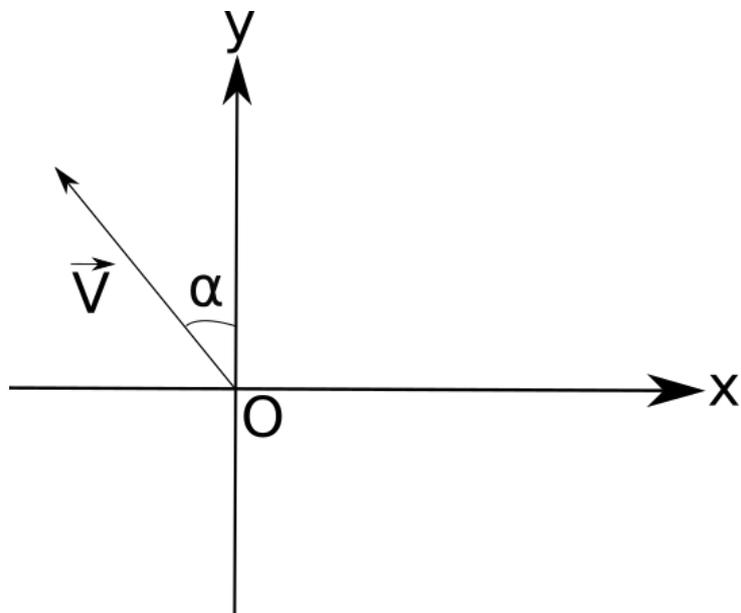


Figure 8: Le vecteur  $\vec{V}$  fait un angle  $\alpha$  avec la verticale.