Université Libre de Bruxelles

Année Académique 2024-2025 | *PHYS-G1103*

Physique appliquée aux sciences de la Vie - Module I | *Antonin Rovai et Vincent Wens*

BA1 en Sciences Biomédicales et Médecine Vétérinaire

Série d'exercice n° 3

Coordonées cartésiennes et Vecteurs

Solutions finales des exercices à préparer et des exercices non-étoilés

1 Rappels

- Nous nous intéressons à un point P pouvant se déplacer sur un *plan* ("monde à deux dimensions").
- On utilise alors un point de référence O et un *système d'axes* pour repérer P grâce à ses coordonnées.
- **Notation:** pour un point de référence O et deux axes x et y, on note Oxy le système d'axe correspondant.
- Les axes sont *perpendiculaires* l'un par rapport à l'autre, et les coordonnées du point P sont définies par *projection orthogonale* (voir figure 1).

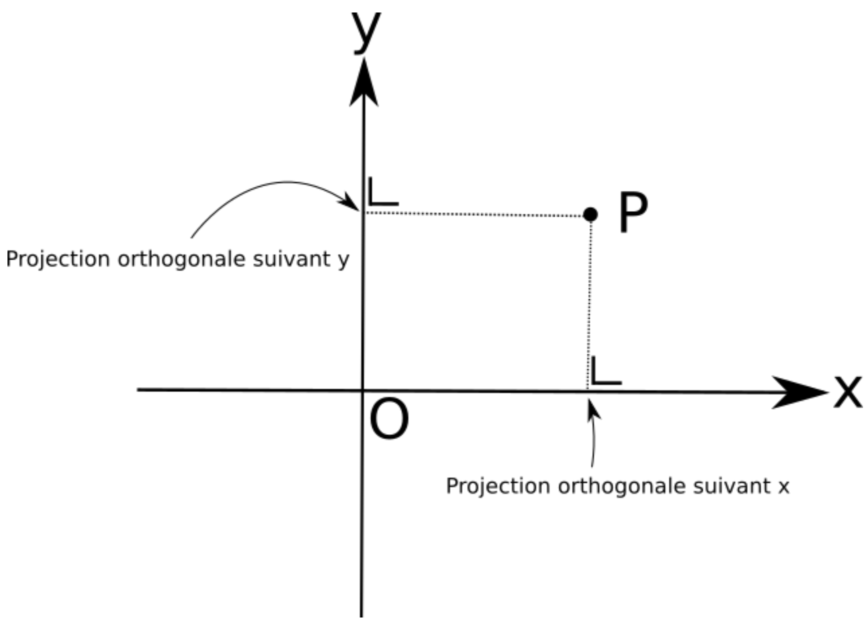

Figure 1: Les coordonnées sont définies par projection orthogonale selon les axes.

- **Définition**: le *vecteur position* est noté $\overrightarrow{OP}$ et correspond à la *flèche partant du point O et se terminant au point P*. Voir figure 2.

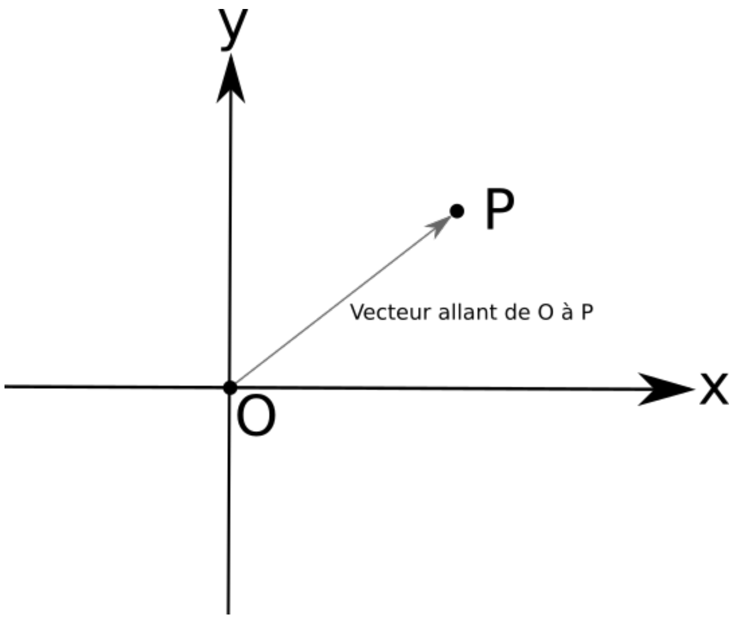

Figure 2: Le vecteur position est la flèche partant du point O et se terminant sur le point P.

- **Définition**: De manière générale, un *vecteur* est un concept mathématique correspondant à une *direction* et une *intensité*. Il peut être caractérisé par ses *composantes* suivant un système d'axes donné. On le note **toujours** avec une petite flèche par dessus, comme par exemple pour $\overrightarrow{OP}$ ou $\vec{F}$.

- Le calcul des composantes d'un vecteur est appelé la *décomposition* d'un vecteur. Elle se fait toujours *par rapport à un système d'axes.*

- **Notation:** si un vecteur $\vec{A}$ a des composantes A_x et A_y dans le système d'axe Oxy, alors on écrit

$$\vec{A} = (A_x, A_y)\,. \tag{1}$$

  D'autres notations existent (en colonne par exemple) et sont également acceptées (nous ne faisons pas de différence dans ce cours entre ces notations).

- Nous avons également défini géométriquement les opérations de somme et de multiplication par un nombre quelconque. Ces opérations sont résumées ici en supposant que les vecteurs ont été décomposés:

  1. **Somme**: si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs, alors le vecteur $\vec{A}+\vec{B}$ a les composantes $(A_x + B_x, A_y + B_y)$.
  2. **Multiplication par un nombre**: si $\vec{A}$ est un vecteur et a est un nombre réel quelconque, alors le vecteur $a\vec{A}$ a les composantes (aA_x, aB_y).
  3. **Norme**: si $\vec{A}$ est un vecteur de composantes (A_x, A_y), alors on défini la *norme* de $\vec{A}$ par le nombre suivant:

  $$\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

     On note souvent $||\vec{A}||$ ou même parfois simplement juste A pour la norme de $\vec{A}$.

- **Attention**: un vecteur ne peut *jamais* être "égal" à un nombre réel. On ne peut donc *jamais* écrire quelque chose comme "$\vec{A} = 5$". *Cela n'a aucun sens car un vecteur contient plus d'information qu'un nombre réel.*

- Si le point P se déplace au cours du temps, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ dépend du temps. Les composantes sont donc des fonctions du temps: $x(t)$ et $y(t)$.

- **Rappel de trigonométrie**: Pour un triangle rectangle comme sur la figure 3, on a les relations suivantes:

$$h^2 = a^2 + b^2 \qquad a = h\cos\alpha$$
$$\tan\alpha = b/a \qquad b = h\sin\alpha$$

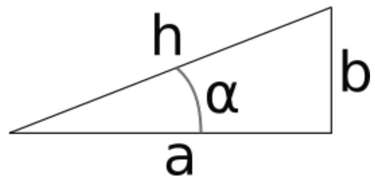

Figure 3: Les relations entre les paramètres a, b, h et α dans un triangle rectangle seront utiles pour décomposer des vecteurs.

2 Exercices à préparer

Attention! Ces exercices **ne** seront **pas** corrigés durant la séance, mais les solutions seront disponibles sur l'UV.

1. Que valent les coordonnées x et y du point P de la figure 4? $x = 3, y = 2$

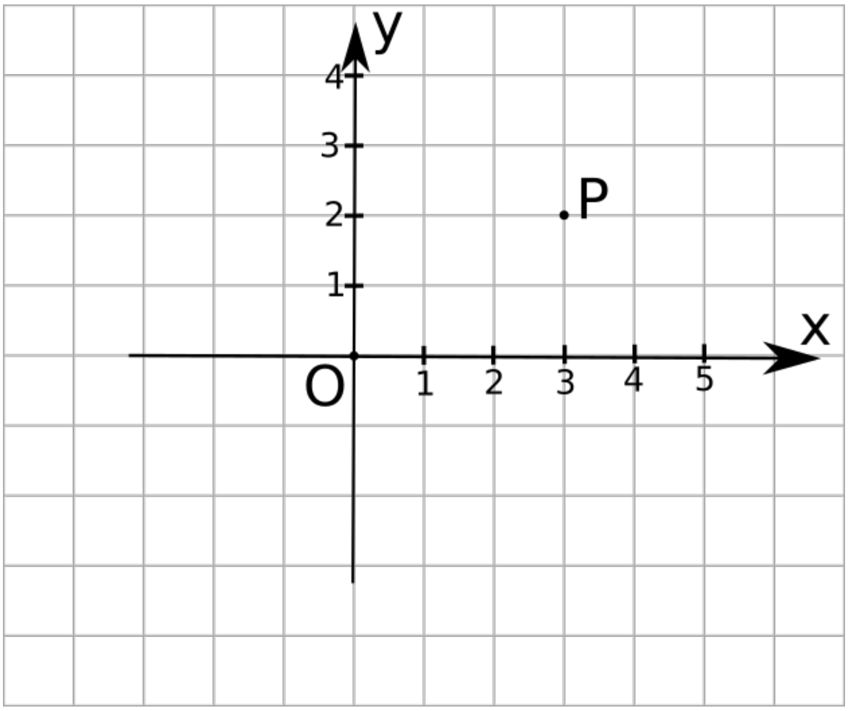

Figure 4: On demande les coordonnées x et y du point P.

2. Que vaut la somme des vecteurs $(1, 0)$ et $(-1, -1)$? $(0, -1)$

3 Exercices

Les exercices marqués d'une étoile sont à résoudre en priorité.

⋆ 1. On considère le système d'axes Oxy et les 4 points P_1, P_2, P_3 et P_4 sur la figure 5.

(a) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_3}$ et $\overrightarrow{OP_4}$.

(b) Que vaut le vecteur $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_3}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la base de la flèche au point O.

(c) Que vaut le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_2}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O.

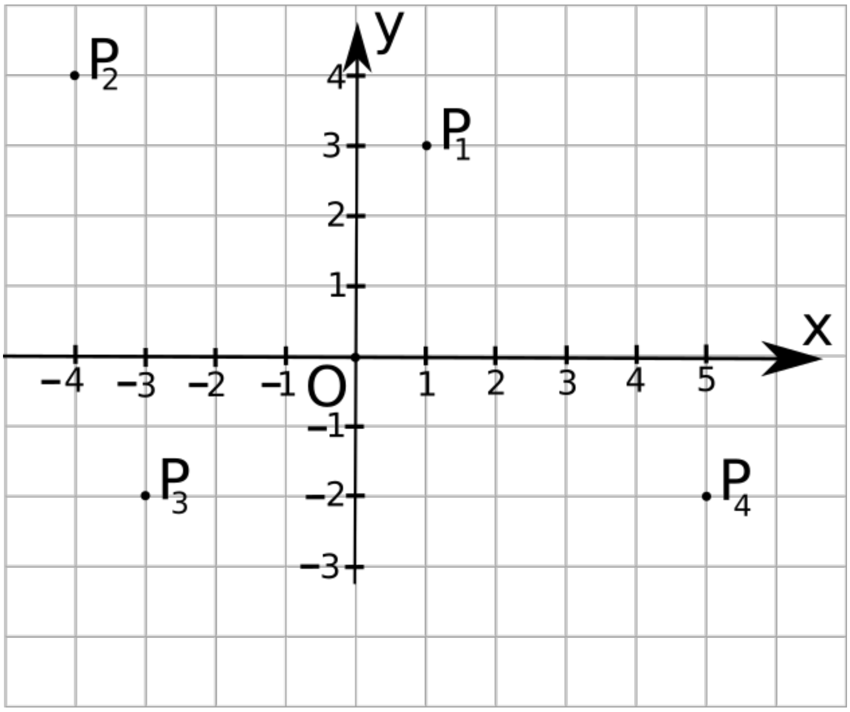

Figure 5: On utilise les coordonnées par rapport au système d'axes Oxy.

2. Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs comme sur la figure 6.

(a) Que valent les composantes de ces vecteurs? $\vec{A} = (-3, -2), \vec{B} = (2, -4), \vec{C} = (4, 2)$

(b) Que valent les normes A, B et C? $A = \sqrt{13}, B = C = 2\sqrt{5}$

(c) Que vaut la somme $\vec{A} + \vec{C}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O. $\vec{A} + \vec{C} = (1, 0)$

(d) Que vaut la différence $\vec{B} - \vec{A}$? Donner la réponse en composantes et représenter ce vecteur sur la figure, en localisant la flèche au point O. $\vec{B} - \vec{A} = (5, -2)$

(e) Calculer la norme des vecteurs $\vec{A} + \vec{B}$ et $\vec{A} - \vec{B}$. $||\vec{A} + \vec{C}|| = 1, ||\vec{B} - \vec{A}|| = \sqrt{29}$

(f) Que vaut l'angle que fait $\vec{C}$ avec l'horizontale et avec la verticale? On rapporte ici les angles à leurs valeurs dans le premier quadrant, c'est-à-dire compris entre 0 et $\pi/2 rad$. $63.43°$

⋆ 3. On considère un point dont le vecteur de vitesse $\vec{V}$ est représenté sur la figure 7. On note α l'angle qu'il fait avec l'horizontale et V sa norme. Que valent les composantes V_x et V_y en fonction de α et V?

4. Même question que ci-dessus, mais cette fois le vecteur est donné sur la figure 8 et α est l'angle pris par rapport à la verticale. $\vec{V} = -V(\sin\alpha, \cos\alpha)$

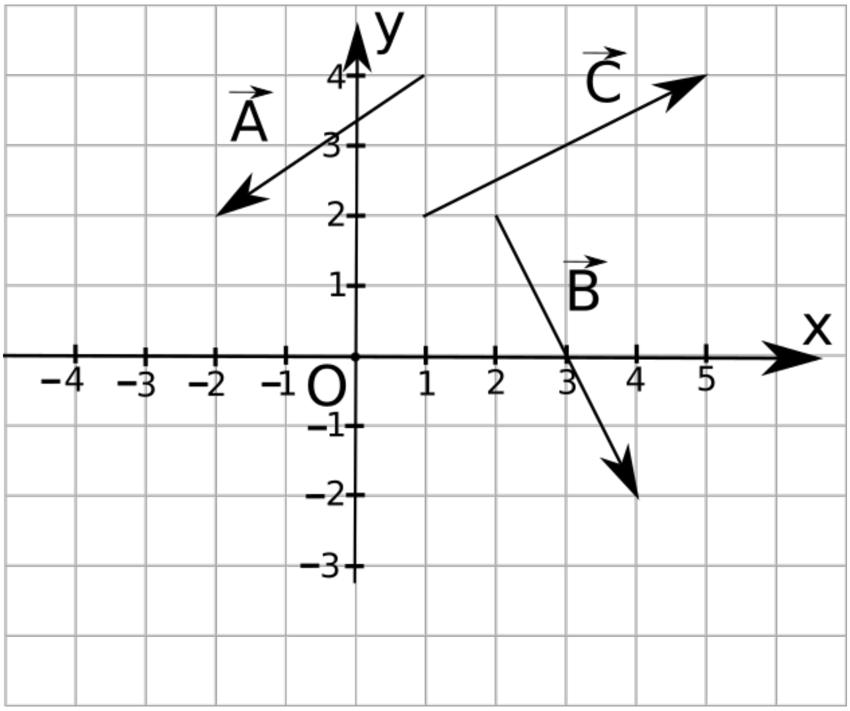

Figure 6: Trois vecteurs à différences angles et différents points de localisation.

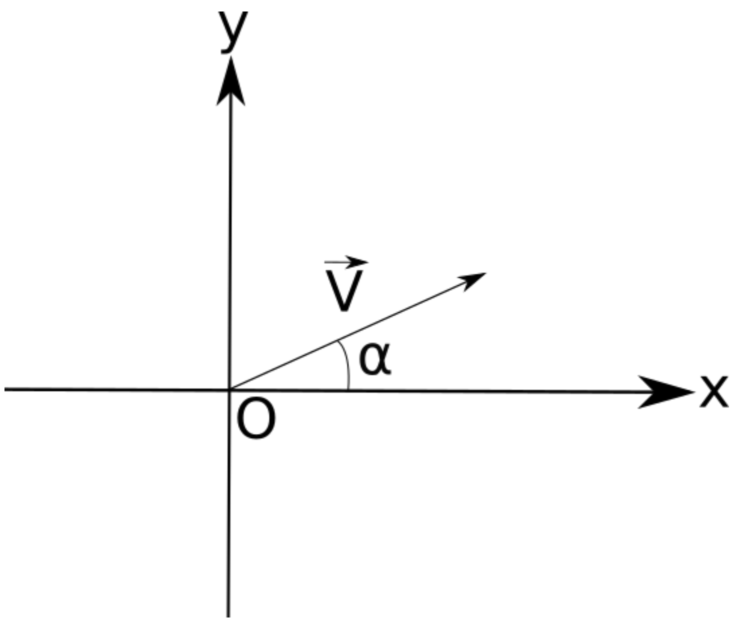

Figure 7: Le vecteur $\vec{V}$ fait un angle α avec l'horizontale.

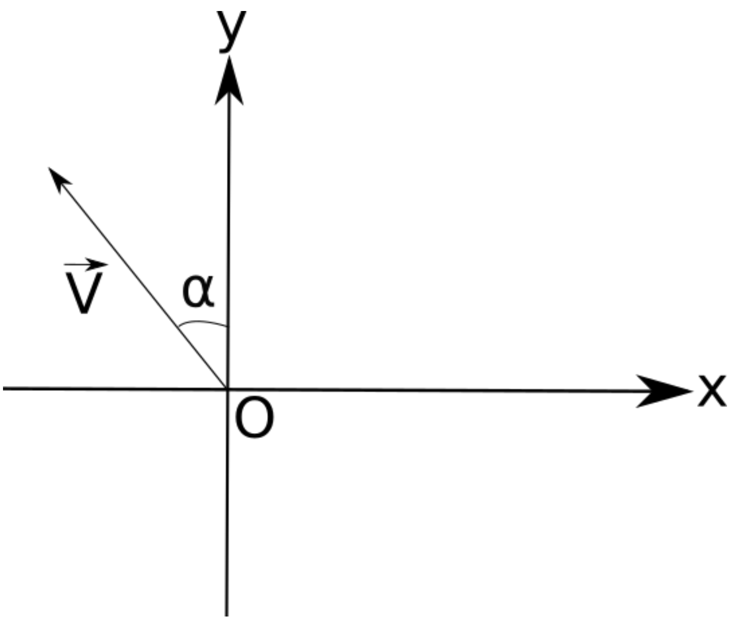

Figure 8: Le vecteur $\vec{V}$ fait un angle α avec la verticale.