

## BA1 en Sciences Biomédicales et Médecine Vétérinaire

## Série d'exercice n° 7

## ÉNERGIE

Solutions finales des exercices à préparer et des exercices non-étoilés

## 1 Rappels

- **Définition:** l'énergie cinétique  $E_c$  d'un corps de masse  $m$  est définie par la formule

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1)$$

où  $v$  est la norme du vecteur vitesse du corps.

- **Dimensions:** les dimensions de l'énergie cinétique sont  $ML^2T^{-2}$ .
- **Définition:** le joule (symbole:  $J$ ) est l'unité du Système International pour l'énergie et est défini par

$$1J = 1kg.m^2.s^{-2}. \quad (2)$$

- **Définition:** pour n'importe quelle force  $\vec{f}$  agissant sur un corps, on définit la *puissance*  $\mathcal{P}$  par la formule

$$\mathcal{P} = \vec{v} \cdot \vec{f}. \quad (3)$$

- **Remarque:** en toute rigueur, on devrait noter  $\mathcal{P}_{\vec{f}}$  afin de rappeler qu'il s'agit de la puissance associée à  $\vec{f}$ , mais en général on note simplement  $\mathcal{P}$  pour ne pas trop alourdir les notations.
- **Dimensions:** les dimensions de  $\mathcal{P}$  sont  $ML^2T^{-3}$ .
- **Définition:** le watt (symbole:  $W$ ) est l'unité du Système International pour la puissance et est défini par

$$1W = 1J/s = 1kg.m^2.s^{-3}. \quad (4)$$

- **Définition:** pour une force  $\vec{f}$  exercée sur un corps et durant un intervalle de temps compris entre  $t_1$  et  $t_2$ , on définit le *travail*  $W(t_1, t_2)$  par la formule

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt. \quad (5)$$

- **Remarque:** à nouveau, il faut garder à l'esprit qu'il s'agit ici du travail associé à  $\vec{f}$ .

- **Propriété:** si, sur l'intervalle de temps compris entre  $t_1$  et  $t_2$ , la force  $\vec{f}$  est constante, alors

$$W(t_1, t_2) = \vec{f} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (6)$$

où  $\vec{r}_1$  (resp.  $\vec{r}_2$ ) est la position du corps en  $t_1$  (resp.  $t_2$ ). Le vecteur  $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  est appelé le vecteur de *déplacement*, et avec cette notation la formule se réduit à  $W(t_1, t_2) = \vec{f} \cdot \vec{d}$ .

- **Propriété:** si  $W(t_1, t_2)$  est le travail associé à la force *totale* s'exerçant sur un corps, on a la formule

$$\text{Cas de la force totale: } E_c(t_2) - E_c(t_1) = W(t_1, t_2). \quad (7)$$

C'est l'équation du bilan d'énergie cinétique.

- **Définitions:** Pour un corps soumis à la force de pesanteur  $\vec{P}$  ou à la force d'un ressort  $\vec{R}$  de constante de rappel  $k$ , on définit l'énergie potentielle  $E_P$  par les formules suivantes:

$$\text{cas de la pesanteur: } E_P = -m\vec{g} \cdot \vec{r}, \quad (8)$$

$$\text{cas du ressort: } E_P = \frac{1}{2}kr^2. \quad (9)$$

Dans ces formules: le point central  $\cdot$  représente le produit scalaire (voir plus bas),  $\vec{r}$  est le vecteur position, et  $r$  est sa norme. Pour le cas du ressort, nous avons pris le point de référence  $O$  égal au point d'équilibre  $P_0$ .

- Si un corps est soumis simultanément aux forces de pesanteur et de rappel, l'énergie potentielle totale est la somme des énergies potentielles (8) et (9).

- **Définition:** l'énergie mécanique  $E$  est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,

$$E = E_C + E_P. \quad (10)$$

- **Cas particulier:** pour un ressort de constante de rappel  $k$ , et pour un mouvement d'amplitude  $A$ , l'énergie mécanique vaut

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (\text{cas du ressort}). \quad (11)$$

- **Propriété:** pour la force de pesanteur ou la force de rappel d'un ressort, on a la formule suivante pour le travail  $W$  associé:

$$(\text{Travail de } \vec{P} \text{ ou } \vec{R} \text{ :}) W(t_1, t_2) = E_P(t_1) - E_P(t_2). \quad (12)$$

- **Propriété:** si on écrit la force totale  $\vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}$ , et si  $W(t_1, t_2)$  dénote le travail associé à  $\vec{f}$ , alors on a la formule

$$(\text{Travail de la force } \vec{F} - \vec{P} - \vec{R} \text{ :}) E(t_2) - E(t_1) = W(t_1, t_2). \quad (13)$$

C'est l'équation du bilan d'énergie.

- **Cas particulier:** si le travail des forces autres que la force de pesanteur ou la force de rappel d'un ressort est nul, alors l'énergie mécanique totale est conservée dans le temps:

$$E(t_1) = E(t_2). \quad (14)$$

- **Propriété:** pour deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , leur produit scalaire peut être calculé grâce à la formule

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta, \quad (15)$$

où  $\theta$  est l'angle formé par les deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  et  $A, B$  sont les normes de ces vecteurs.

## 2 Exercices à préparer

Attention! Ces exercices **ne** seront **pas** corrigés durant la séance, mais les solutions seront disponibles sur l'UV.

1. Que vaut l'énergie cinétique d'un humain de  $80\text{kg}$  se déplaçant à une vitesse de  $10\text{m/s}$ ?  $4000\text{J}$
2. Si une pierre est jetée depuis le haut d'un pont, son énergie potentielle va-t-elle diminuer ou augmenter?  $\text{Diminuer}$
3. Si deux vecteurs sont perpendiculaires, que vaut leur produit scalaire?  $0$

### 3 Exercices

Les exercices marqués d'une étoile sont à résoudre en priorité.

- ★ 1. (**Ordres de grandeur**) On considère un moteur à explosion d'une puissance  $\mathcal{P} = 100kW$ .
- Quelle énergie est dégagée par le moteur en 1 seconde?
  - A quelle hauteur pouvons-nous élever une masse de 10 tonnes avec cette énergie? On suppose que 100% de l'énergie produite par le moteur est convertie en énergie gravitationnelle.
  - Mêmes questions que ci-dessus, mais maintenant pour la puissance de  $\mathcal{P} = 1GW$ , qui correspond à la puissance du réacteur nucléaire de Doel 4.
- ★ 2. (**Cinématique et Conservation de l'énergie**) On se propose, dans cet exercice, de revisiter à la lumière du théorème de conservation de l'énergie certains aspects du problème du mouvement parabolique de la série sur la cinématique en deux dimensions.

On considère un corps ponctuel de masse  $m = 42kg$  se mouvant dans le plan  $Oxz$ , la seule force agissant sur  $m$  étant son poids. Au temps  $t = 0s$ , le point se trouve sur le point de référence  $O$  (placé au niveau du sol), sa vitesse fait un angle  $\alpha = 13^\circ$  avec l'horizontale et la norme de sa vitesse vaut  $v_0 = 5m/s$ . Voir figure 1 pour un récapitulatif.

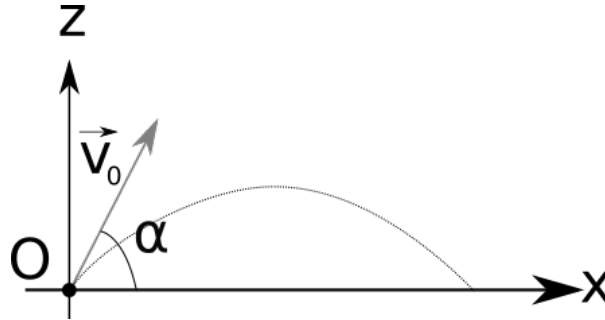


Figure 1: Une trajectoire parabolique dans le plan  $Oxz$ .

- Que vaut l'énergie cinétique  $E_C(t)$  lorsque  $t = 0s$ ?
- Que vaut l'énergie potentielle  $E_P(t)$  lorsque  $t = 0s$ ?
- On note  $t_{\max}$  le moment où le corps atteint son altitude maximum. Que vaut l'énergie cinétique  $E_C(t_{\max})$ ?
- En utilisant la formule de conservation de l'énergie, déterminer l'énergie potentielle  $E_P(t_{\max})$ .
- Que vaut la hauteur maximum  $z_{\max} = z(t_{\max})$ ?
- On note  $t_*$  le moment où le corps retombe au sol. En calculant l'énergie potentielle  $E_P(t_*)$  et en exploitant la conservation de l'énergie, déterminer la norme de sa vitesse  $v_*$  en  $t = t_*$ .
- Calculer la puissance  $\mathcal{P}(t)$  en fonction du temps  $t$ .
- (Attention, cette question est sensiblement plus difficile que la moyenne et est facultatif) En utilisant la formule (5), calculer le travail correspondant à l'intervalle de temps compris entre  $t_0$  et  $t_{\max}$ . Comparer le résultat obtenu à la variation d'énergie potentielle calculée plus haut sur le même intervalle.

Afin de rendre cette discussion plus réaliste, on décide maintenant d'inclure les effets des frottements du corps avec l'air. On note  $\vec{f}$  la force associée à ces frottements, et la seule hypothèse que nous faisons sur  $\vec{f}$  est qu'elle est toujours opposée à la vitesse  $\vec{v}$  du corps:  $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ , où  $\lambda$  est un nombre positif.

i. (*Attention, cette question est sensiblement plus difficile que la moyenne et est facultatif*)  
 Dans le cas où  $\alpha = \pi/2 \text{ rad}$ , montrer que la hauteur maximale de la trajectoire est maintenant inférieure à  $z_{\max}$ .

3. On considère une grue soulevant un bloc de béton de masse  $m = 100 \text{ kg}$ . Le bloc, que nous assimilons à un corps ponctuel, est initialement au sol, où nous plaçons notre point de référence  $O$ . Il est élevé par la grue jusqu'à une hauteur de  $h = 15 \text{ m}$ . Voir figure 2 pour un récapitulatif. La vitesse du bloc, durant tout le mouvement, est supposée constante et de norme égale à  $20 \text{ cm/s}$ .

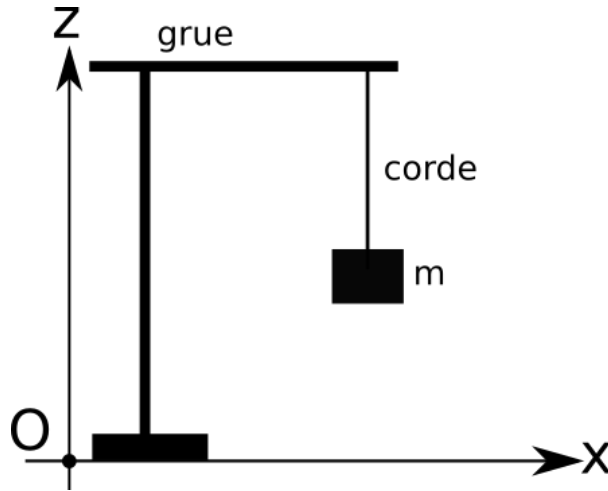


Figure 2: Une grue soulève un bloc de béton à vitesse constante.

- Que vaut la force  $\vec{f}$  exercée par la grue sur le bloc?  $\vec{f} = (0, 1000 \text{ N})$
  - En utilisant la formule  $W = \vec{f} \cdot \vec{d}$ , calculez le travail effectué par cette force. Voyez-vous pourquoi nous pouvons utiliser cette formule?  $15000 \text{ J}$
  - Que vaut l'énergie mécanique au début et à la fin du mouvement? Début:  $2 \text{ J}$  et fin:  $15002 \text{ J}$
  - Vérifier que les résultats des deux questions précédentes sont cohérents avec la conservation de l'énergie.  $15002 \text{ J} - 2 \text{ J} = 15000 \text{ J}$
4. (Mouvement Circulaire Uniforme et Travail) On considère un corps ponctuel de masse  $m$  décrivant un MCU dans le plan  $Oxy$ , de rayon  $R$  et centré en  $O$ . La trajectoire  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  peut donc être représentée par les formules:

$$x(t) = R \cos(\omega t + \theta_0) , \quad (16)$$

$$y(t) = R \sin(\omega t + \theta_0) , \quad (17)$$

où  $\omega$  et  $\theta_0$  sont des paramètres fixés.

- Que valent les vecteurs vitesse et accélération pour ce corps?  $\vec{v} = \omega R(-\sin(\omega t + \theta_0), \cos(\omega t + \theta_0))$  et  $\vec{a} = -\omega^2 R(\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0)) = -\omega^2 \vec{r}(t)$
- En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, calculer la force totale  $\vec{F}$  agissant sur  $m$ . Exprimer votre réponse en fonction de  $m$ ,  $\omega$  et  $\vec{r}(t)$ .  $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}$
- Que vaut la puissance associée à  $\vec{F}$ ?  $\mathcal{P} = 0$
- En utilisant la conservation de l'énergie, montrer que la norme de la vitesse doit être constante dans ce mouvement. Conservation de l'énergie donne  $E_c = \text{cst.}$ , donc la norme de  $\vec{v}$  est constante.

e. Calculer la norme de la vitesse en fonction de  $R$  et  $\omega$ . Voyez-vous à quelle étape du calcul la dépendance en  $t$  disparaît?  $v = |\omega|R$

5. (Pendule) Un pendule simple est un système constitué comme suit: une corde, de masse négligeable et de longueur  $L$ , est attachée à l'une de ses extrémités à un point  $O$ , supposé fixe. A l'autre extrémité de la corde, un corps ponctuel de masse  $m$  est attaché. On suppose que la corde est toujours tendue, et le mouvement a lieu dans un plan vertical que nous équipons d'un système d'axe  $Oxz$ , voir figure 3. Les forces s'exerçant sur le corps sont son poids  $\vec{P}$  ainsi que la tension  $\vec{T}$  de la corde. De plus, on note  $\alpha_0$  l'angle initial que fait la corde avec l'axe des  $z$ , la vitesse initiale étant nulle.

a. Montrer que la puissance associée à la force de tension est toujours nulle.  $\vec{T}$  est toujours perpendiculaire à  $\vec{v}$  donc la puissance associée est toujours nulle.

b. En utilisant la conservation de l'énergie, déterminer la vitesse  $\vec{v}_*$  lorsque le corps croise l'axe des  $z$ . Exprimer votre réponse en fonction de  $L$ ,  $g$  et  $\alpha_0$ .  $v_* = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha_0)}$

Afin de pimenter un peu le problème, on suppose maintenant qu'un clou est planté sur l'axe des  $z$ , en dessous et à une distance  $d$  de  $O$  ( $d$  étant plus petit que  $L$ ), et ce de façon à modifier la trajectoire du corps comme illustré sur la figure 3.

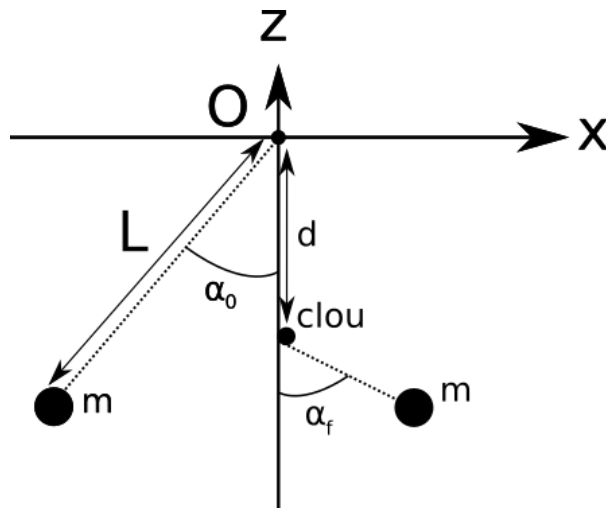


Figure 3: Pour ce pendule asymétrique, le longueur effective de la corde est réduite à  $L - d$  lorsque  $x > 0$ .

c. En notant  $\alpha_f$  l'angle maximal fait par le pendule après avoir rencontré le clou, déterminer  $\alpha_f$  en fonction de  $\alpha_0$ ,  $d$  et  $L$ .  $\alpha_f = \arccos \frac{\cos \alpha_0 - d/L}{1 - d/L}$

6. (Plan incliné et frottements) On considère un corps ponctuel de masse  $m = 12\text{kg}$  sur un plan incliné faisant un angle  $\theta = 26^\circ$  avec l'horizontale. Une force  $\vec{f}$  est appliquée sur le corps, et on suppose que  $\vec{f}$  est constante, orientée parallèlement au plan incliné et pointant vers le sens de la montée, et est de norme  $f = 150\text{N}$ . On suppose que la vitesse initiale est nulle. On note  $\mu_c = 0.1$  le coefficient de frottement cinétique entre le corps et le plan, et on s'intéresse au système après qu'une distance  $d = 3m$  soit parcourue. Voir figure 4 pour un récapitulatif.

a. Calculer le travail effectué sur l'entièreté du mouvement par la force  $\vec{f}$ .  $450\text{J}$

b. Même question que ci-dessus mais pour la force de frottement dynamique  $\vec{F}_d$ . Sous quelle forme cette énergie est-elle (probablement) transformée par le système?  $-32.4\text{J}$ , chaleur.

c. Que vaut la variation d'énergie potentielle gravitationnelle?  $158\text{J}$

d. Déterminer, en utilisant la conservation de l'énergie, la norme de la vitesse finale  $v_f$  du corps.  $v_f = \sqrt{2d(f/m - g(\mu_d \cos \theta + \sin \theta))} = 6.6\text{m/s}$

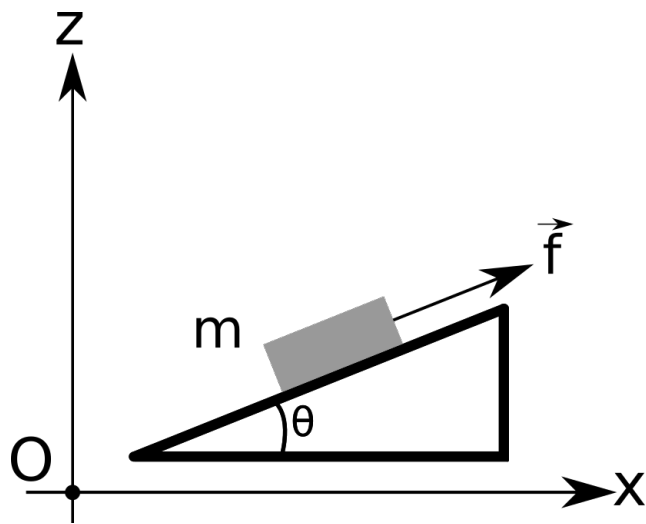


Figure 4: Un corps de masse  $m$ , schématisé ici par un bloc, est tiré vers le haut le long d'un plan incliné.