(Suite Cinématique à 1d)

Rappel : $$v(t) = \lim_{t_2 \to t} \frac{x(t_2) - x(t)}{t_2 - t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Propriété : $v(t)$ est la dérivée de $x(t)$:

$$v(t) = \underbrace{\frac{dx(t)}{dt} = x'(t)}_{\text{2 notations pour la dérivée}}$$

Sur nos exemples :

1). MRU : $x(t) = x_0 + vt$

$$x'(t) = v$$

Pour un MRU, la vitesse est constante.

2). MH : $x(t) = A \sin(\omega t)$

$$x'(t) = \omega A \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow v(t) = \omega A \cos(\omega t).$$

$$[v(t)] = [\omega A] = \frac{1}{T} L = LT^{-1}.$$

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

Si on fait une erreur !

$$\underbrace{x'(t)}_{v(t)} \overset{?}{=} A \cos(\omega t)$$

$$[v] = LT^{-1}$$

???

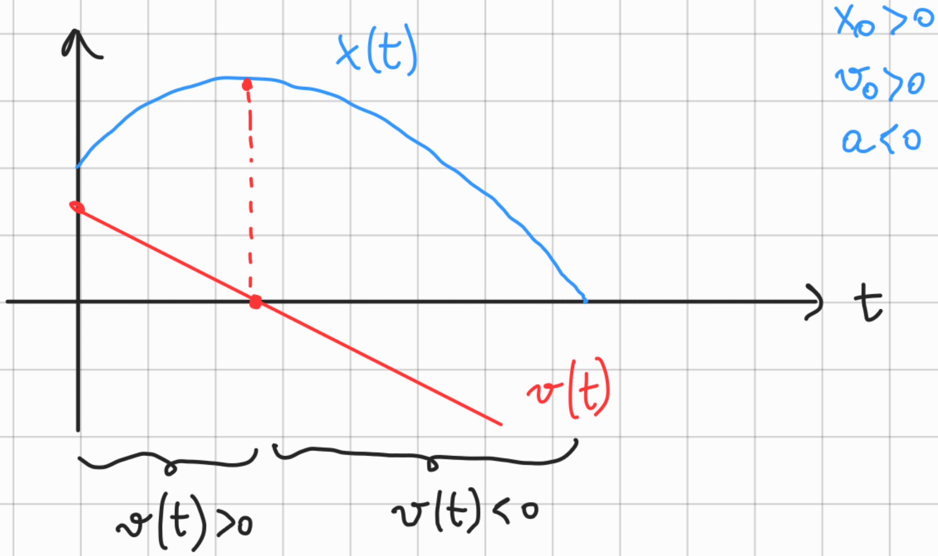
$$[A \cos(\omega t)] = [A] = L$$

3). MRUA : $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$$x'(t) = 0 + v_0 + at$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 + at$$

Pour un MRUA, la vitesse est linéaire en t.



Rappel : $v(t) > 0 \Rightarrow x(t)$ augmente
$v(t) < 0 \Rightarrow x(t)$ diminue
$v(t) = 0 \Rightarrow x(t)$ est à un extremum.

D. L'accélération

Définition : accélération d'une trajectoire $x(t)$ est donnée par

$$a(t) = x''(t) = v'(t)$$

↳ dérivée seconde.

$[a(t)] = L\,T^{-2}$

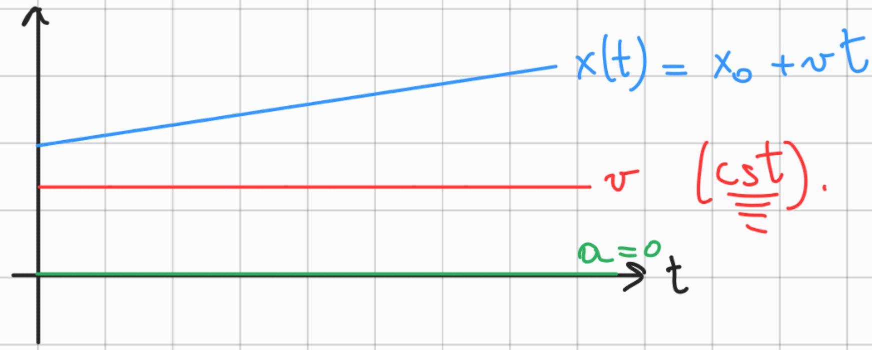
Exemple : $g = 10\,ms^{-2}$ "accélération gravitationnelle".

Notation : $a(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

Dans nos exemples ?

1). MRU : $x(t) = x_0 + vt$
$v(t) = v$
$\Rightarrow a(t) = 0.$

Pour un MRU, l'accélération est nulle.



2). MH : $x(t) = A\sin(\omega t)$

$$v(t) = \omega A\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t)$$

$$[a(t)] = [\omega^2 A] = \frac{L}{T^2} \quad \text{OK!}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sin(ax) \Rightarrow f'(x) = a\cos(ax) \\ g(x) = \cos(ax) \Rightarrow g'(x) = -a\sin(ax) \end{cases}$$

Remarque : pour le MH, on a

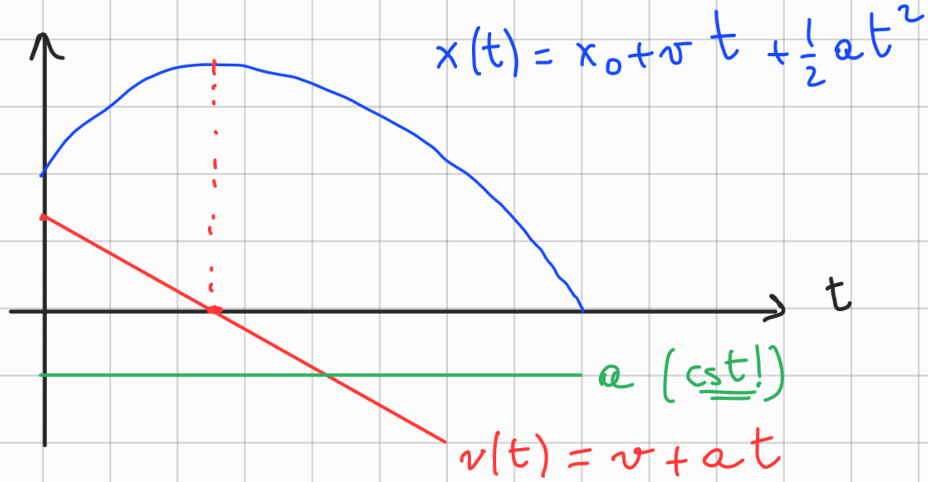
$$a(t) = -\omega^2 x(t).$$

3). MRUA : $x(t) = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$

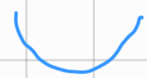
$$v(t) = v + at$$

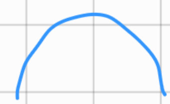
$$\Rightarrow a(t) = a.$$

Pour un MRUA, l'accélération est constante.



Rappel : $a(t)$ donne une information sur la courbure de la trajectoire.

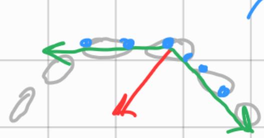
$a(t) > 0$: $x(t)$ convexe 

$a(t) < 0$: $x(t)$ concave 

2. Cinématique à deux et trois dimensions

Rappel : notions de base sur les vecteurs

(orthodontie) Déplacement de dent à l'aide d'un appareil.



$\Rightarrow$ la flèche rouge est la résultante des 2 flèches vertes :

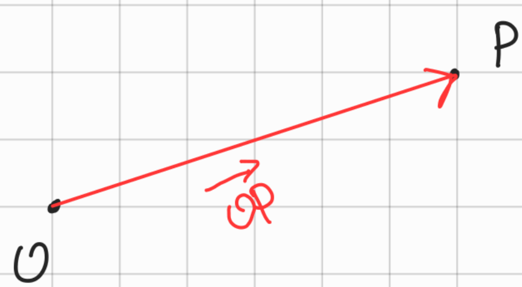
Flèche rouge
= effet désiré

Flèches vertes =
réglages possibles

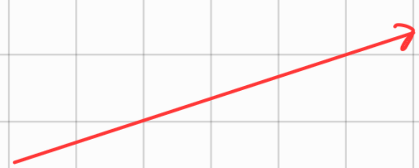
Notre but : rendre cette discussion précise d'un point de vue mathématique.
En particulier, nous voulons faire des calculs !

<u>Définition</u> : un <u>vecteur</u> est la donnée combinée d'une <u>direction</u> et d'une <u>intensité</u>.

[Direction = inclu le sens !]



$\vec{OP}$ = vecteur qui "part" de O et "arrive" en P. ("Vecteur position").

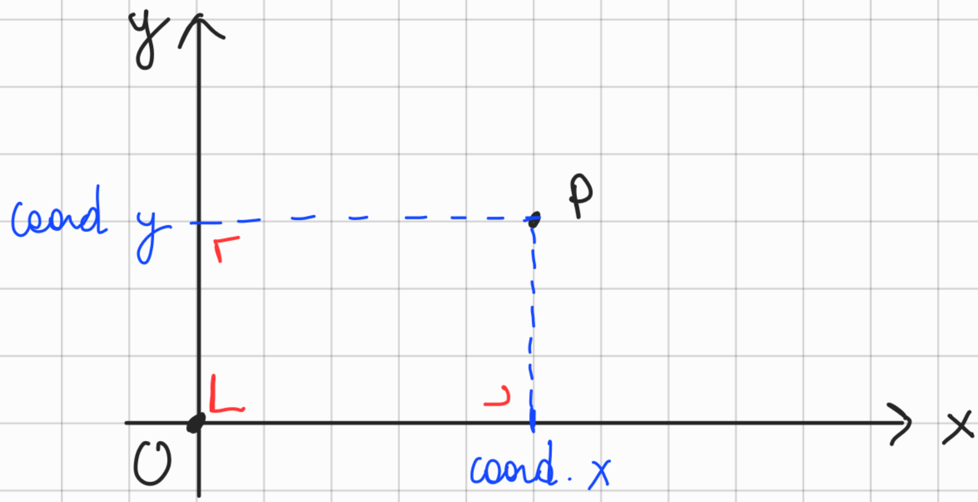


=> même flèche que ci-dessus : même longueur et même direction => $\vec{OP}$.

Si on inverse le sens, on obtient

$\vec{OP} \neq \vec{PO}$. (voir + bas).

Coordonnées en deux dimensions :



"Système d'axes Oxy"

Système "cartésien" : l'axe Ox est perpendiculaire à l'axe Oy.

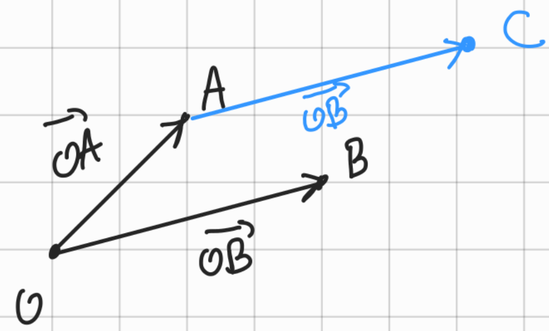
La méthode de projection orthogonale permet d'associer deux nombres, x et y, au point P.

Notation : $\vec{OP} = (x, y)$.

Autres notations : $\vec{OP} = (x ; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Opérations sur les vecteurs.

1). Addition :



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

Conséquence : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}$

vecteur nul

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}$$

En composantes ?

Si on note $\overrightarrow{OA} = (x_A, y_A)$ et

$\overrightarrow{OB} = (x_B, y_B)$, alors

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (x_A + x_B, y_A + y_B)$$

(somme "composante par composante").

Propriété : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$. (à vérifier !)

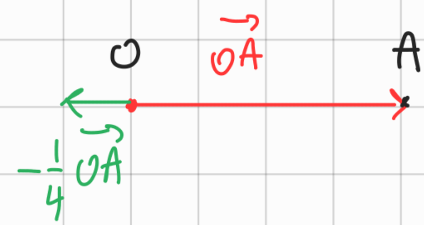
2). Multiplication par un nombre :

$\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ ont la même direction, mais pas la même longueur.

$\Rightarrow \vec{OB} = \lambda \vec{OA}$ (λ : nombre réel.)

où λ est un nombre.

Si $\lambda > 0$, $\vec{OB}$ a le même sens que $\vec{OA}$. Sinon, $\vec{OB}$ a le sens opposé :



En composantes : $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

3). Décomposition norme / angle.

Définition : la norme d'un vecteur (x, y) vaut $\sqrt{x^2+y^2}$.

Interprétation géométrique :

norme = longueur (= intensité).

Propriété : norme est toujours ≥ 0, et vaut exactement 0 si et seulement si le vecteur est nul.

Notation : si $\vec{V}$ est un vecteur, on note $\|\vec{V}\|$ sa norme :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} .$$

On note aussi parfois simplement

$$V = \|\vec{V}\| .$$