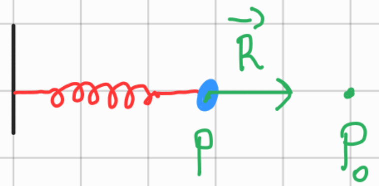
(Suite chapitre II : LA DYNAMIQUE ; la force de rappel).

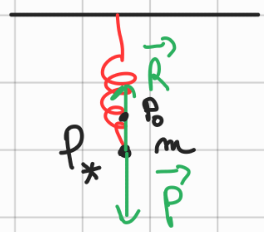
Rappel du dernier cours :



Modèle : $\vec{R} = -k\,\overrightarrow{P_0P}$ (loi de Hooke).

Deux applications :

1). Statique.



P_0 = point tel que $\vec{R} = \vec{0}$

P_* = point tel que $\vec{P} + \vec{R} = 0$

Si la masse m est à l'équilibre, alors son accélération est nulle : $\vec{a} = \vec{0}$.
Par $\vec{F} = m\vec{a}$, on trouve donc

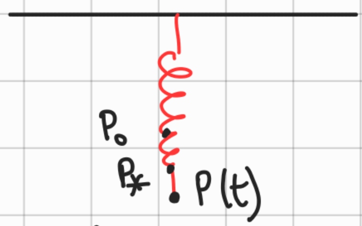
$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}.$$

But : déterminer $\|\overrightarrow{P_0P_*}\|$ en fonction des paramètres du problème : m, k, g.

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow R = P = mg$$
$$= k\,\|\overrightarrow{P_0P_*}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{P_0P_*}\| = \frac{m}{k}g.$$

Vérification : $\left[\frac{m}{k}g\right] = \frac{\cancel{M}}{\cancel{M}\cancel{T^{-2}}} L\cancel{T^{-2}} = L$ ok !

2). Dynamique : m est en mouvement.



On déforme la configuration d'équilibre en supposant que P reste sur la verticale.

Calculons la force totale : $\vec{F} = \vec{R} + \vec{P}$.

Donc :

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= -k\,\overrightarrow{P_0P} + m\vec{g} \\
&= -k\left(\overrightarrow{P_0P_*} + \overrightarrow{P_*P}\right) + m\vec{g} \\
&= \cancel{-k\,\overrightarrow{P_0P_*}} - k\,\overrightarrow{P_*P} + \cancel{m\vec{g}}
\end{aligned}
$$

par la déf. du point P_*

$\Rightarrow \vec{F} = -k\,\overrightarrow{P_*P}$.

$\Rightarrow$ On a donc l'équation $m\vec{a} = -k\,\overrightarrow{P_*P}$.

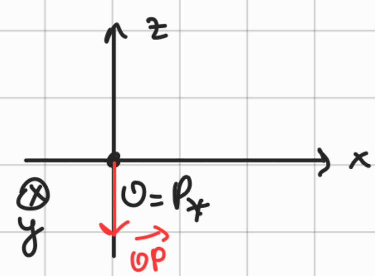
Choisissons un point de référence O et un système d'axes cartésiens : on prend

$$O = P_*.$$

Pour les axes, on prend Oz = verticale ascendante. On note

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z) \quad \text{et} \quad \vec{a} = (x'', y'', z'')$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{aligned}
m x'' &= 0 \\
m y'' &= 0 \\
m z'' &= -k z
\end{aligned}
$$



$x(t)$ et $y(t)$ restent constants (et nuls).

Il nous reste donc une seule équation à résoudre :

$$\boxed{m z'' = -k z} \qquad (*)$$

Ceci est un exemple d'équation différentielle.
L'inconnue est la fonction $z(t)$.

Remarque : on a déjà rencontré une équation de ce type... Rappel :

$$a(t) = -\omega^2 z(t) \qquad (MH).$$

Grâce à ceci, nous pouvons facilement trouver une solution de l'équation $(*)$
En effet :

$$z'' = -\frac{k}{m} z$$

On voit ici que si on choisit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

alors on a exactement la même relation vue en Cinématique 1D, MH :

$$z(t) = A \sin(\omega t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right).$$

On observe que ω est fixé par k et m.
En particulier, pour k et m fixées, on ne peut pas choisir la période des oscillations !

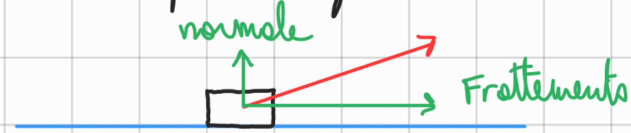
$$2\pi f = \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$f \sim \sqrt{k}$.

Le paramètre A (amplitude) n'est pas fixé par les paramètres k, m et g. C'est un des paramètres que l'on peut choisir expérimentalement (→ condition initiale).

D. Forces exercées par une surface rigide

→ forces de frottement et force normale.
En général : la force exercée par une surface a une composante perpendiculaire à elle-même, ainsi qu'une composante parallèle :



La force normale : $\vec{N}$, ⊥ à la surface.
Frottements : 2 cas :

A. (Corps immobile) Force de frottement statique ; $\vec{F}_s$

B. (Corps en mouvement sur la surface) Force de frottement cinétique (dynamique) ; $\vec{F}_d$

Modèles : $\vec{N}$: s'ajuste pour que l'accélération dans la direction ⊥ à la surface vaut zéro.

$\vec{F}_s$: s'ajuste pour que l'accélération dans la direction // à la surface vaut zéro. Ceci n'a évidement de sens que lorsque $\vec{a} = \vec{0}$.

Condition d'existence de $\vec{F_s}$:

On doit avoir que

$$F_s \leqslant \mu_s N$$

où μ_s = coefficient de frottement statique ; $[\mu_s] = 1$.

$\mu_s N$ = "force de frottement maximale".

$\vec{F_d}$: par hypothèse, $\vec{v} \neq \vec{0}$. On a alors :

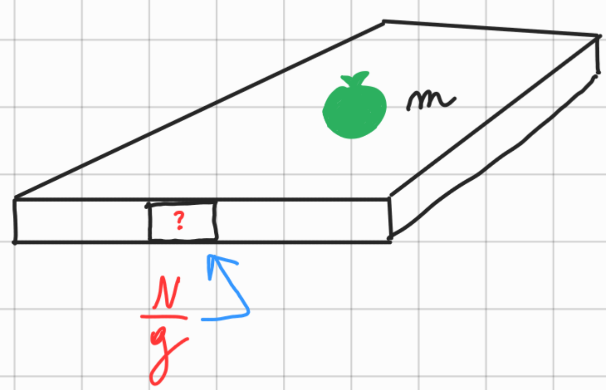
Direction de $\vec{F_d} = -\vec{v}$

Norme : $F_d = \mu_d N$, où

μ_d : coefficient de frottement dynamique.

Applications :

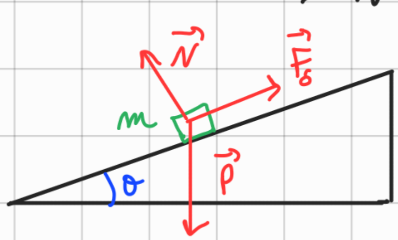
1). Balance de cuisine.



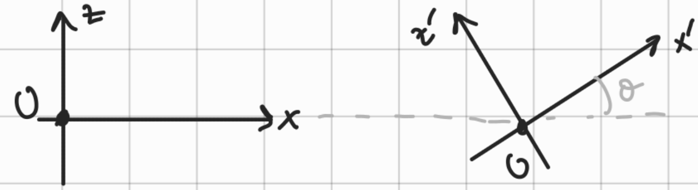
Balance : mesure N et affiche N/g.

Si m est immobile, alors

$$\vec{P} + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow N = mg. \Rightarrow \frac{N}{g} = m.$$

2). 

Plan incliné.



Nous pouvons toujours choisir le système d'axes pour répondre à des questions physiques. Ici, on peut par exemple se demander "si on augmente progressivement θ, à partir de quelle valeur le bloc se met-il à glisser?". Le résultat peut être trouver en utilisant Oxz ou $Ox'z'$; dans les deux cas, nous devons trouver $\arctan \mu_s$. (voir exercices).