# Chapitre III : LES THÉORÈMES DE CONSERVATION

## 1. Energie, Puissance et Travail

### A. L'Energie Cinétique

Définition : pour un corps ponctuel de masse $m$ et de vitesse $\vec{v}$, on définit l'énergie cinétique $E_c$ :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 .$$

$[E_c] = M L^2 T^{-2}$

SI : $1 kg\, m^2 s^{-2} = 1 J$ (Joule)

Exemples : 1). $m = 70$ kg $\quad v = 5$ km/h

$$E_c = 67.5 \text{ J} .$$

2). $m = 10$ tonnes $\quad v = 200$ km/h

$$E_c = 1.5 \times 10^7 \text{ J} .$$

Remarque : 1). $E_c \geq 0$ et $= 0$ uniquement si $\vec{v} = \vec{0}$.

2). En général, $E_c(t)$.
"$E_c$ n'est conservée (dans le temps)".

## B. Forces conservatives, Energie potentielle

Si une force $\vec{f}$ est conservative, il existe une fonction du temps, $E_p(t)$, appelée Energie Potentielle, telle que

$$E_c(t) + E_p(t)$$

ne dépend pas du temps.

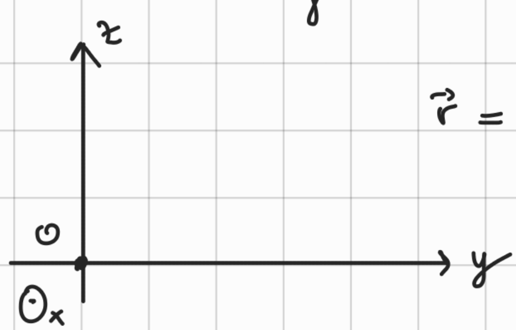
**Définition :** $E = E_c(t) + E_p(t)$ est appelée l'énergie mécanique.

Attention : $E_c(t) + E_p(t)$ est constant si toutes les forces sont conservatives.

Exemples :

1). Poids : $\vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow E_p = -m\vec{g}\cdot\vec{r}(t)$.

"Potentiel gravitationnel".




$\vec{r} = (x, y, z)$ $\quad \vec{g} = (0, 0, -g)$

$\Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{g} = -gz$

$\rightarrow E_p = mgz$.

**Exercice :** vérifier explicitement que

$\frac{1}{2}m\,v(t)^2 + mgz(t)$

ne dépend plus du temps.

On trouve : $\frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_0$.

2). Force de rappel : $\vec{R} = -k \overrightarrow{P_0 P}$

$\Rightarrow E_p(t) = \frac{k}{2} \|\overrightarrow{P_0 P(t)}\|^2$.

3). Si $\vec{F} = \vec{P} + \vec{R}$, alors $\vec{F}$ est conservative, et l'énergie potentielle associée est

$$-m\vec{g}\cdot\vec{r} + \frac{k}{2}\|\overrightarrow{P_0 P(t)}\|^2.$$

($\Rightarrow$ somme des $E_p$).

Propriété : (théorème de la conservation de l'énergie mécanique) : Si toutes sont forces conservatives, alors l'énergie mécanique est conservée.

## C. Travail et Puissance

Idée : formaliser le concept de transfert (ou de variation) d'énergie.

Définition : pour un corps ayant une vitesse $\vec{v}(t)$ et sur lequel s'exerce une force $\vec{f}$, on définit la puissance $\mathcal{P}_f$ associée à $\vec{f}$ par :

$$\mathcal{P}_f(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{f}$$

$$[\mathcal{P}_f] = LT^{-1} MLT^{-2} = ML^2T^{-3}$$
$$= \frac{ML^2T^{-2}}{T} = \frac{[\text{Energie}]}{T}$$

SI : $1\,kg\,m^2 s^{-3} = 1\,J/s = 1\,W$ (Watt).

<u>Propriété</u> : la puissance $\mathcal{P}_{tot}$ associée à $\vec{F}$ est telle que

$$\mathcal{P}_{tot}(t) = E_c'(t).$$

Ceci est une conséquence de $\vec{F} = m\vec{a}$.

Remarques :

1). Pour $\Delta t$ "petit", on a :

$$\mathcal{P}_{tot} \simeq \frac{\Delta E_c}{\Delta t}.$$

2). On peut aussi écrire :

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{tot}(t)\,dt = E_c(t_2) - E_c(t_1) = \Delta E_c$$

3). Si $\vec{f}$ est $\perp$ $\vec{v}$, alors $\mathcal{P}_f = 0$.

<u>Définition</u> : le travail de la force $\vec{f}$ est défini par

$$W_f(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow W_{tot}(t_1, t_2) = E_c(t_2) - E_c(t_1).$$

Cas particulier : il y a uniquement des forces conservatives qui agissent sur le corps:

$$E_c(t_1) + E_p(t_1) = E_c(t_2) + E_p(t_2)$$

$$E_p(t_1) - E_p(t_2) = E_c(t_2) - E_c(t_1)$$

$$-\Delta E_p = W_{tot}(t_1, t_2)$$

Cas particulier pour le calcul de W :

1). si $\vec{f} \perp \vec{v}$, alors $W_f = 0$.

2). si $\vec{f}$ est constante, alors

$$W_f(t_0, t_1) = \vec{f} \cdot \Delta\vec{r}$$

où $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)$ ("vecteur déplacement")
De plus, si $\vec{f} \parallel \Delta\vec{r}$, alors

$$W_f(t_0, t_1) = f \Delta r \cos\theta$$

où $\cos\theta = \begin{cases} +1 & \text{si } \vec{f} \text{ est dans le même sens que } \Delta\vec{r} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

$t_1$


$\Rightarrow \quad W_f > 0$


$\Rightarrow \quad W_f < 0.$

Que peut-on dire de la variation d'énergie lorsque la force totale est une somme de forces conservatives et de forces non-conservatives ?

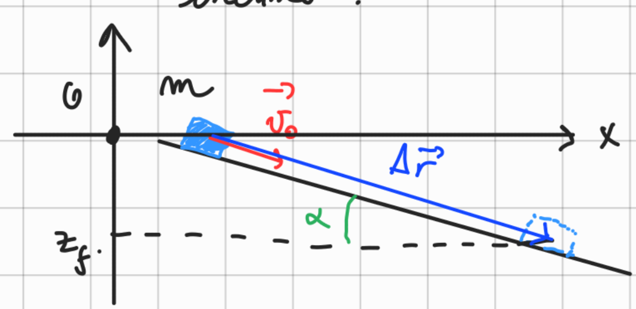
Le travail total est alors la somme du travail des f.c. et des f. non-c :

$$\underbrace{W_{tot}}_{\Delta E_c} = \underbrace{W_{f.c.}}_{-\Delta E_p} + W_{f.\,non-c}.$$

$\Rightarrow$ Théorème du bilan d'énergie mécanique :

$$\boxed{\Delta E = W_{f.\,non-c}.}$$

Exemple : bloc lancé sur un plan incliné :




Où ce bloc va-t-il s'arrêter ?

E initiale : $E_c(t_0) = \frac{1}{2} m v_0^2$

$E_p(t_0) = 0 \qquad (z_0 = 0)$

E finale : $E_c(t_1) = 0$

$E_p(t_1) : m g z_{final}$

$$\Delta E = m g z_f - \frac{1}{2} m v_0^2 = W_{F_d}$$

$$W_{F_d} = \text{travail de } \vec{F_d} = - F_d \Delta r$$

[Or : $F_d = \mu_d N$ où $N = mg\cos\alpha$, donc :]

$$= -\mu_d m g \underbrace{\cos\alpha\, \Delta r}_{\Delta x}$$

$\sin\alpha\, \Delta r = z_f$

$tg\alpha\, \Delta x = z_f$

$$= -\mu_d m g \frac{z_f}{tg\alpha}$$

$$\Rightarrow \cancel{m} g z_f - \frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 = -\mu_d \cancel{m} g \frac{z_f}{tg\alpha}.$$

$\Rightarrow z_f = \dots$ (fonction des paramètres du problème).