Chapitre IV : MÉCANIQUE DES SOLIDES

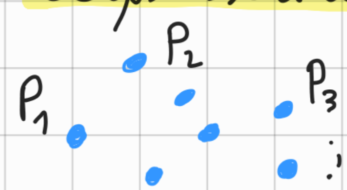
1. Introduction

Jusqu'ici $\rightarrow$ système de points massifs.
Description d'un grand nombre de corps $(\sim 10^{23})$!
$\rightarrow$ semble impossible, ou en tout cas "très compliqué"...
Semble aussi assez inintéressant dans un contexte pratique !
$\rightarrow$ on n'a pas besoin de tous les détails.

Exemple : redresser une dent n'implique que de connaître l'angle qu'elle forme avec, par ex., une autre dent.

$\Rightarrow$ on veut juste changer θ.

Définition : un ensemble de corps ponctuels dont les distances mutuelles restent constantes au cours du temps est appelé un corps solide.



$$\|\overrightarrow{P_1P_2}\|, \|\overrightarrow{P_1P_3}\|, \dots \text{ sont constants.}$$

Dans le monde réel, aucun corps n'est

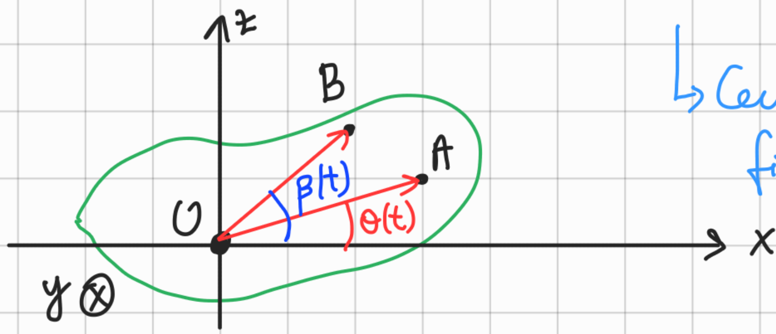
parfaitement solide (vibration, ...). Mais en bonne approximation nous négligeons ces effets dans ce chapitre.

Question (= but chapitre) : comment décrire ces corps en fonction des forces extérieures ?

2. Cinématique angulaire

Idée : caractériser comment l'angle d'un corps solide dépend du temps.

On suppose qu'il y a toujours un point fixe au solide : c'est le point pivot.



↳ Ceci est une simplification dans ce cours

Ici, O est le point pivot.
L'angle $\theta(t)$ est différent de $\beta(t)$. Mais, par définition du corps solide, les variations sont identiques (au cours du temps).

$$\Rightarrow \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d\beta(t)}{dt}$$

$\Rightarrow \omega = \dfrac{d\theta(t)}{dt}$ est une propriété du solide dans son ensemble.

"vitesse angulaire".

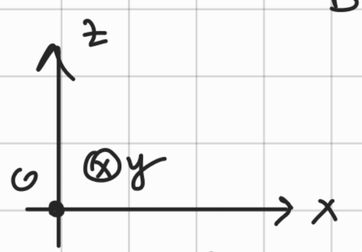
Dans le même ordre d'idée, on définit l'accélération angulaire α par

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}.$$

Interlude mathématique : le PRODUIT VECTORIEL

Définition : $\vec{A} = (A_x ; A_y ; A_z)$

$\vec{B} = (B_x ; B_y ; B_z)$



Le produit vectoriel de $\vec{A}$ avec $\vec{B}$ est défini par

$$(\vec{A} \times \vec{B})_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_y = A_z B_x - B_z A_x$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$$

$\vec{A} \times \vec{B}$ est bien un vecteur.

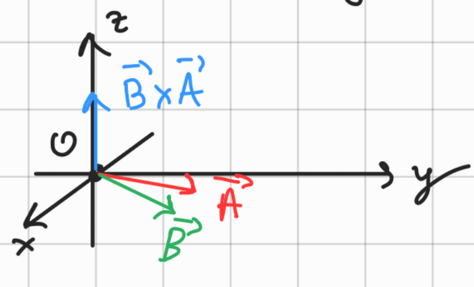
"Truc" pour retrouver ces formules :
"déterminant" 3x3

$$\begin{vmatrix} (x) & (y) & (z) \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \Big(A_y B_z - B_y A_z, \; -(A_x B_z - B_x A_z), \; A_x B_y - B_x A_y \Big)$$

Propriétés : [Toutes ces propriétés peuvent être démontrées à partir de la définition.]

1). $\vec{A} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{A}$

2). $\vec{A} \times \vec{B}$ est toujours $\perp$ à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$.



$\vec{A}, \vec{B}$: dans le plan Oxy

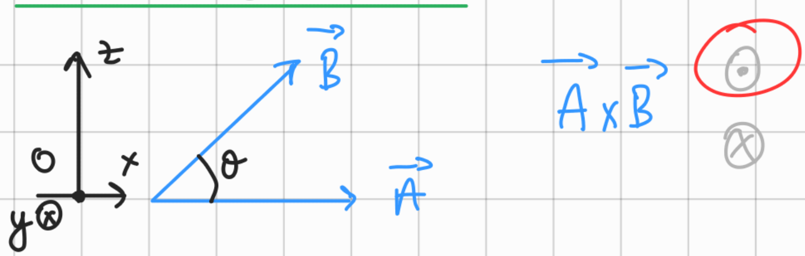
3). Pour calculer la norme de $\vec{A}\times\vec{B}$, on peut utiliser la formule :

$$\|\vec{A}\times\vec{B}\| = AB \sin \theta(\vec{A},\vec{B})$$

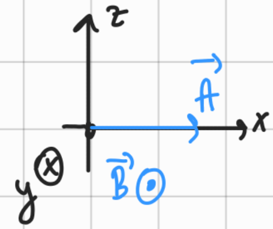
où $\theta(\vec{A},\vec{B})$ est l'angle formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et est compris entre 0 et π.

En particulier, si $\vec{A}$ et $\vec{B}$, sont parallèles, alors $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$.

4). La direction de $\vec{A} \times \vec{B}$ peut être déterminée grâce à la règle de la main droite :



$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta \, (0 ; -1 ; 0)$



$\vec{A} \times \vec{B} = AB\,(0\,;\,0\,;\,-1)$
(car $\sin \pi/2 = 1$).

Par la définition ?

$$\vec{A} = (A\,;0\,;0) \qquad \vec{B} = (0\,;-B\,;\,0)$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})_x = \underset{0\,\cdot\,0}{A_y B_z} - \underset{0\,\cdot\,0}{A_z B_y} = 0$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})_y = -\underset{A\,\cdot\,0}{A_x B_z} + \underset{0\,\cdot\,0}{A_z B_x} = 0$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})_z = \underset{A\cdot(-B)}{A_x B_y} - \underset{0\,\cdot\,0}{A_y B_x} = -AB$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = (0\,;0\,;-AB)$$

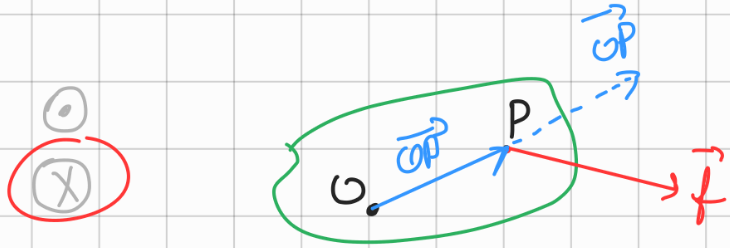
3. L'équation de la dynamique des solides.

Définition : si une force $\vec{f}$ s'exerce sur un corps solide, on définit le moment de $\vec{f}$ par rapport à A par la formule

$$\vec{\tau}_A(\vec{f}) = \vec{AP} \times \vec{f}$$

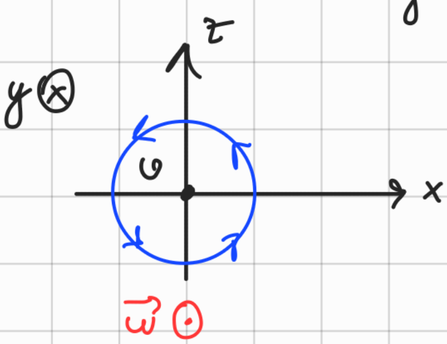
où P est le point d'application de la force.

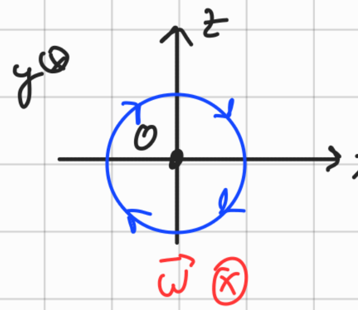
Ici, A est n'importe quel point. En pratique, on prend souvent $A = O$ (= pt. de réf.).



$$\vec{\tau}_O(\vec{f}) = \vec{OP} \times \vec{f}.$$

Définition : le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est un vecteur dont la norme vaut la valeur absolue de la vitesse angulaire et le sens est déterminé par la règle de la main droite :





$\vec{\omega} = (0; -|\omega|; 0)$ $\qquad$ $\vec{\omega} = (0; |\omega|; 0).$

On définit alors le vecteur accélération angulaire $\vec{\alpha}$ par

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$