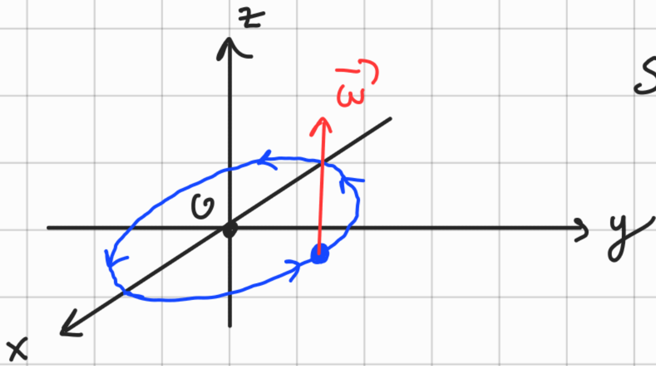
(Suite chap III. Mécanique des Solides)

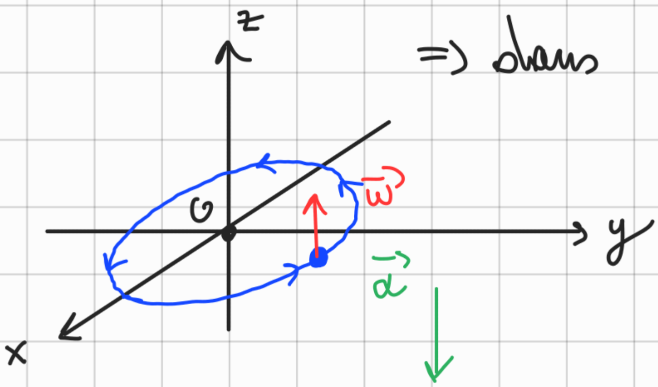
Représentation de $\vec{\omega}$ avec la perspective :



Système en MCU dans le plan Oxy ; sens de rotation "trigonométrique" ...

$\vec{\omega} = (0; 0; \omega)$

Supposons que ω diminue.



$\Rightarrow$ dans ce cas, $\vec{\alpha}$ est non-nulle.

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{\alpha} \simeq \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega}_f - \vec{\omega}_i}{\Delta t} = \downarrow$$

Nous pouvons maintenant donner la loi fondamentale de la dynamique :

1). Moment de force total :

$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_O(\vec{F}_1) + \vec{\tau}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{\tau}_O(F_{42})$$

2). $\vec{\tau}_O = I_O \vec{\alpha}$

où I_O = moment d'inertie du solide par rapport au point O.

I_O : nombre positif, qui dépend de la répartition de la masse du corps.

Dans le cours, on s'intéresse surtout aux applications statiques.

Donc $\vec{\alpha} = \vec{0}$, d'où

$$\vec{\tau}_O = \vec{0} .$$

La formule générale $\vec{\tau}_O = I_O \vec{\alpha}$ est une conséquence de $\vec{F} = m\vec{a}$, ainsi que le principe de réciprocité.

Remarques :

1). Le moment de force total n'est pas égal au "moment de la force totale".

↳ pas vraiment de sens de toute façon !

En particulier : $\vec{F} = \vec{0} \not\Rightarrow \vec{\tau}_O = \vec{0}$.

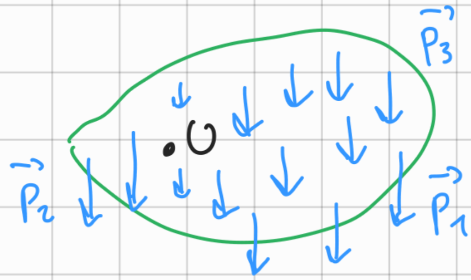
$\vec{\tau}_O = \vec{0} \not\Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$.

2). Propriété : le moment total par rapport à un point O peut être calculé par rapport à n'importe quel autre point si $\vec{F} = \vec{0}$.

$$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau}_A = \vec{\tau}_B .$$

4. Centre de gravité d'un solide

Dans le cas où le corps est soumis à la gravitation, nous devons prendre en compte le poids de chacune des parties du corps .... cela semble impossible à faire !

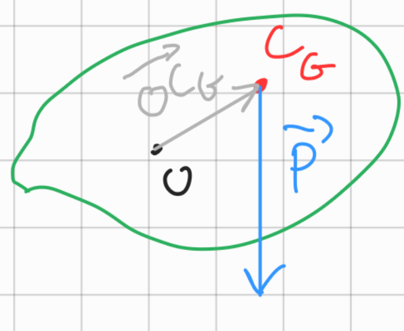


$$\vec{\tau}_O = \sum \vec{\tau}_O(\vec{P}_i)$$

Idée : il existe un point, appelé le Centre de Gravité C_G tel que

$$\vec{\tau}_O = \vec{OC_G} \times \vec{P}$$

où $\vec{P}$ = poids total.



C'est "comme si" on avait "concentré" tout le poids en C_G.

Propriété : si le champ de gravitation est homogène ($\vec{g}$ = constant), alors le centre de gravité coïncide avec le centre de masse :

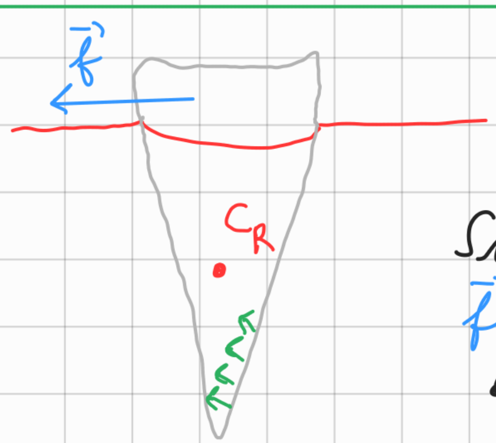
$$\vec{g} = \text{cst} \Rightarrow C_G = C_M .$$

Remarque : le moment de force dû au poids du corps par rapport à C_G vaut toujours $\vec{0}$:

$$\vec{\tau}_{C_G}(\vec{P}) = \vec{0} .$$

En effet, le vecteur position qui localise le C_G par rapport à C_G vaut $\vec{0}$.

Généralisation : le Centre de Résistance.



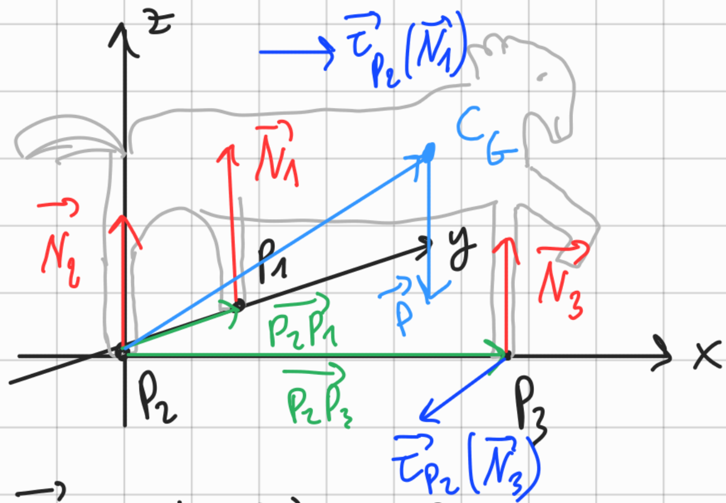
Si on applique la force $\vec{f}$ sur la couronne, la dent va se mettre en rotation.

$\Rightarrow$ on exerce alors plusieurs forces à des points différents de la couronne afin que d'une part la force totale vaut $\vec{f}$ et d'autre par $\vec{\tau}_0 = \vec{0}$.

C_R : Centre de Résistance. Il est tel que le moment de force total dû à gencive vaut $\overrightarrow{OC_R} \times \vec{R}$ où

$\vec{R}$ est la force totale exercée par la gencive.

Question examen (PHYS G1102, 2022-23, janvier)



$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_1}) = \overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{N_1}$

$\Rightarrow$ vers la droite.

$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_3}) = \overrightarrow{P_2P_3} \times \vec{N_3}$

1). $\vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{N_3} = ?$

Corps immobile $\Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$.

$\vec{F} = \vec{P} + \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{N_3} = \vec{0}$

où $\vec{P} = m\vec{g}$

$-m\vec{g} = -m(0; 0; -g)$
$= (0; 0; (-m)(-g))$
$= (0; 0; mg)$

$\Rightarrow \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{N_3} = -\vec{P} = -m\vec{g}$.

$\vec{g} = (0; 0; -g) \Rightarrow \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{N_3} = (0; 0; mg)$.

2). $\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_1}) = (d N_1 ; 0 ; 0)$

$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_2}) = \vec{0}$ car P_2 est le point d'application de $\vec{N_2}$.

$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_3}) = (0; -L N_3 ; 0)$

3). Interlude : montrons la formule de l'aide à partir de la définition du produit vectoriel.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y \, ; \, A_z B_x - A_x B_z \, ; \, A_x B_y - A_y B_x \right)$$

$$(\underset{A_x}{A} ; \underset{A_y}{B} ; \underset{A_z}{C}) \times (\underset{B_x}{0} ; \underset{B_y}{0} ; \underset{B_z}{D}) = \left(BD - 0 \, ; \, 0 - AD \, ; \, 0 - 0 \right)$$

$\Rightarrow$ ok.

On applique maintenant ceci au calcul de $\vec{\tau}_{P_2}(\vec{P})$:

$$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{P}) = \underbrace{\overrightarrow{P_2 C_G}}_{\left(\underset{A}{\frac{3L}{4}} ; \underset{B}{\frac{d}{5}} ; \underset{C}{h}\right)} \times \underbrace{\vec{P}}_{(0;0;\underset{D}{-mg})} = \left(\left(\overset{B}{\frac{d}{5}}\right)\left(\overset{D}{-mg}\right) ; -\left(\overset{A}{\frac{3L}{4}}\right)\left(\overset{D}{-mg}\right) ; 0 \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{P_2}(\vec{P}) = mg \left(-\frac{d}{5} \, ; \, \frac{3L}{4} \, ; \, 0 \right)$$

4). Immobile $\Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau}_{P_2} = \vec{0}$.

Or :

$$\vec{\tau}_{P_2} = \vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_1}) + \underbrace{\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_2})}_{= \vec{0}} + \vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_3}) + \vec{\tau}_{P_2}(\vec{P})$$

$$= \left(dN_1 \, ; 0 ; 0 \right) + \vec{0} + \left(0 \, ; -LN_3 \, ; 0 \right)$$

$$+\, mg\left(-\frac{d}{5}\,;\,\frac{3L}{4}\,;\,0\right)$$

$$=(0;0;0) \quad \text{car} \quad \vec{\alpha}=\vec{0}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d N_1 - mg\frac{d}{5} = 0 & (\text{suivant } x) \\ -L N_3 + mg\frac{3L}{4} = 0 & (\text{suivant } y). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad N_1 = \frac{mg}{5} \qquad N_3 = \frac{3mg}{4}.$$

$N_2 = ?$ On sait que $\vec{N_1}+\vec{N_2}+\vec{N_3} = (0;0;mg)$.

$$\vec{N_1} = (0;0;N_1) = \left(0;0;\frac{mg}{5}\right)$$

$$\vec{N_2} = (0;0;N_2)$$

$$\vec{N_3} = (0;0;N_3) = \left(0;0;\frac{3mg}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{5} + N_2 + \frac{3mg}{4} = mg$$

$$\Rightarrow N_2 = mg\left(1-\frac{1}{5}-\frac{3}{4}\right) = mg\left(\frac{20-4-15}{20}\right)$$

$$\Rightarrow N_2 = \frac{mg}{20}.$$