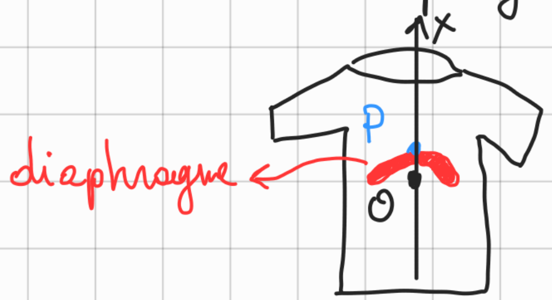
(Suite section "B. Exemples")

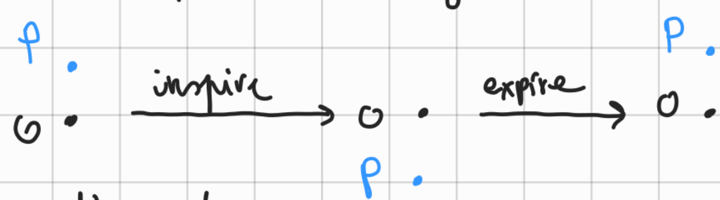
3). Mouvement Harmonique (MH)

Motivation : mouvement du sommet du diaphragme :



O = position moyenne de P.

Lors de la respiration, P oscille autour de sa position moyenne :



Modèle mathématique pour un mouvement régulier :

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

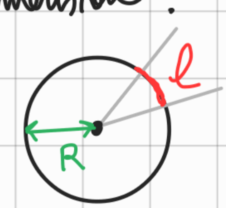
t → variable

A, ω → paramètres

Dimensions des paramètres ?

$[A] = L$ (par ex. : $A = 10$ cm).

$[\omega t] = 1$. Remarque : un angle n'a pas de dimension !

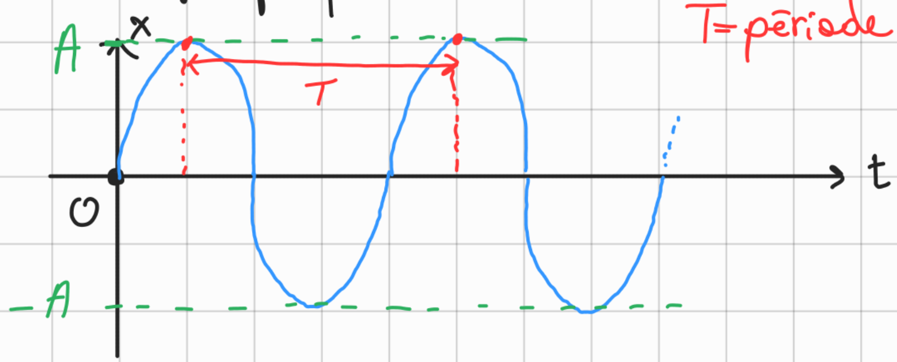


$$\text{Angle} = \frac{\ell}{R}.$$

$\Rightarrow [\omega] = T^{-1}$ (par ex. : 90°/s).

A : amplitude du MH
ω : vitesse angulaire. ("nombre de degrés par seconde").

Représentation graphique :



On définit la fréquence $f = T^{-1}$.
Le paramètre ω est alors donné par :

$$\omega = 2\pi f$$

Calculons f et T pour $\omega = 90°/s$:

$$\omega = 90°/s = \frac{2\pi}{360°}\, 90°/s = \frac{2\pi}{4}\, s^{-1} = \frac{\pi}{2}\, s^{-1}$$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{4}\, s^{-1} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = 4\,s.$$

C. Vitesse moyenne et vitesse instantanée.

Définition : pour une trajectoire $x(t)$ et pour deux instants t_1 et t_2, on définit la vitesse moyenne $v_m(t_1, t_2)$ par :

$$v_m(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Evidement, on suppose ici que $t_1 \neq t_2$.

La dimension de v_m est :

$$[v_m(t_1,t_2)] = LT^{-1}.$$

EXP1 : Mesure expérimentale d'une vitesse moyenne.

Notation : $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$

$\Delta t = t_2 - t_1$

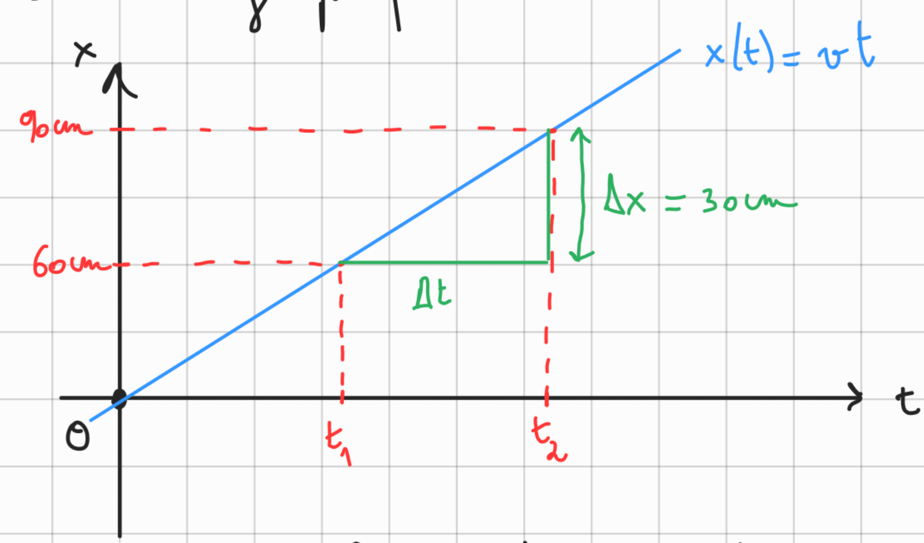
[Remarque : "Δ" = truc après − truc avant]

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= 90\,cm - 60\,cm = 30\,cm \\ \Delta t &= 0.636\,s \end{aligned}\right\} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30\,cm}{0.636\,s} = 0{,}47\,m/s$$

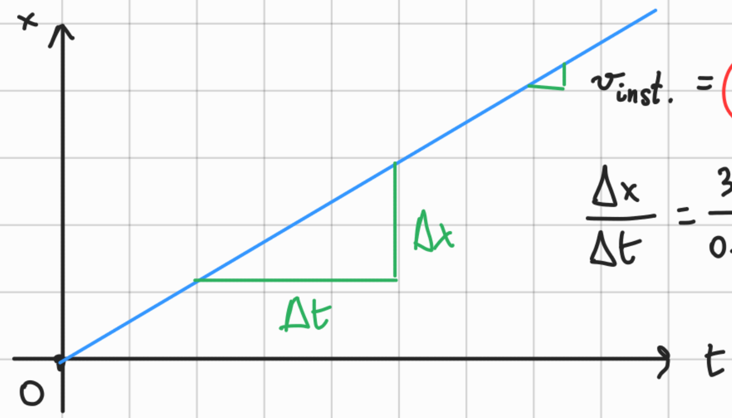
$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= 30\,cm \\ \Delta t &= 1{,}529\,s \end{aligned}\right\} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30\,cm}{1{,}529\,s} = 0{,}20\,m/s$$

Représentation graphique :



$\frac{\Delta x}{\Delta t}$: pente de la droit $x(t) = vt$. Donc le paramètre $v = v_m$. C'est une constante, donc pour le MRU, la vitesse moyenne ne dépend ni de t_1 ni de t_2.

$\boxed{\text{EXP2}}$



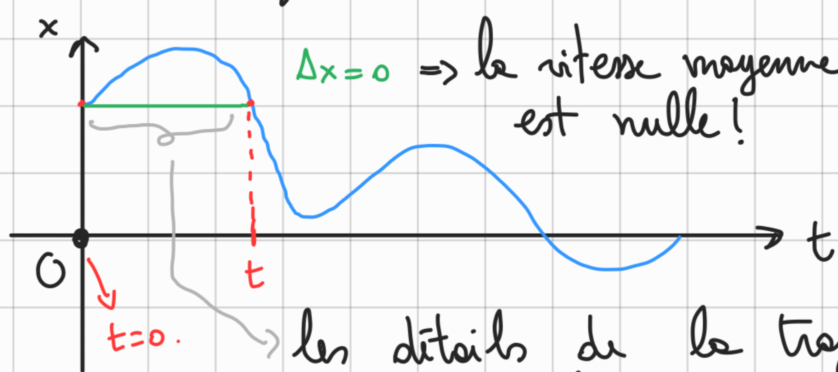
$v_{inst.} = 0.51\,m/s$

$=$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30\,cm}{0.583\,s} = 0.51\,m/s$$

On trouve $v_{inst.} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, ce qui est cohérent avec la propriété de cette trajectoire, selon laquelle la vitesse moyenne est constante.

Remarque : la vitesse moyenne n'est pas sensible aux détails de la trajectoire entre t_1 et t_2.



$\Delta x = 0 \Rightarrow$ la vitesse moyenne entre 0 et t est nulle !

les détails de la trajectoire dans cet intervalle de temps n'ont aucun impact sur v_m.

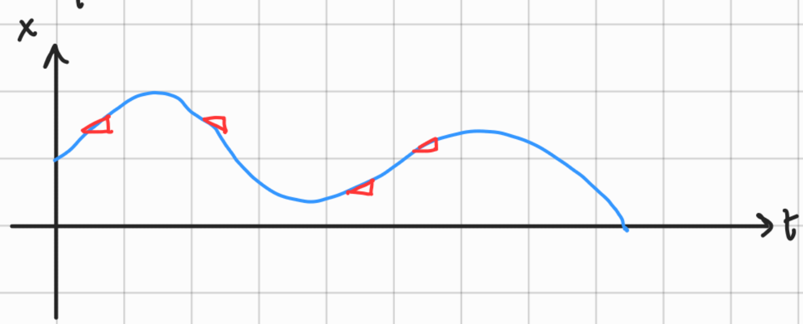
Idée : prendre des Δt de plus en plus petits. En mathématique, c'est le concept de limite.

<u>Définition</u> : pour une trajectoire $x(t)$, la vitesse instantanée en t est définie par

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

En pratique, la vitesse instantanée est toujours estimée par une vitesse moyenne prise avec un Δt "très petit". (dépend du contexte !).

Graphiquement :



<u>Rappel</u> : la vitesse instantanée est égale à la dérivée de $x(t)$:

$$v(t) = x'(t)$$

Notation : $x'(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$.

Si $v(t) > 0$, alors $x(t)$ augmente.
$v(t) < 0$, alors $x(t)$ diminue
$v(t) = 0$, alors $x(t)$ est à un extrêmum (max, min, pt d'inflexion)