(Suite 2. Cinématique en deux dimensions)
(Le rappel sur les notions de base sur les vecteurs est terminé)

A. Position, Vitesse et Accélération

O : point de référence ; P point d'intérêt : P(t)

Vecteur position : $\overrightarrow{OP(t)} = (x(t); y(t))$
Notation : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t)$

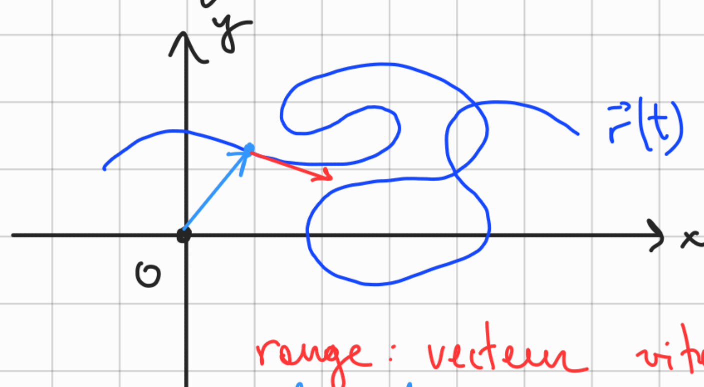
Vecteur vitesse : $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$

Comment calculer la dérivée d'un vecteur ?
$\Rightarrow$ "composante par composante" :

$$\vec{r}(t) = (x(t); y(t)) \Rightarrow \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (x'(t); y'(t))$$

Accélération : $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = (x''(t); y''(t))$

Remarque : le vecteur $\vec{v}(t)$ est toujours tangent à la trajectoire $\vec{r}(t)$.



rouge : vecteur vitesse
bleu clair : vecteur position.

$\vec{v}(t)$ est tangent à la trajectoire.

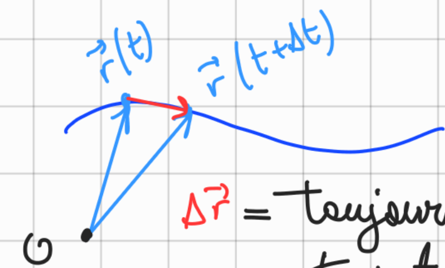
Pour des Δt petits, on a, en bonne approximation :

$$\vec{v} \simeq \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ = vitesse moyenne sur un intervalle de temps très petit :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

$\Rightarrow$ $\vec{v}$ est toujours dans la même direction que $\Delta \vec{r}$.



$\Delta \vec{r}$ = toujours tangent à la trajectoire.

$\Rightarrow$ $\vec{v}$ est toujours tangent à la trajectoire.

B. Exemple 1 : le Mouvement Uniformément Accéléré (MUA)

Trajectoire : $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g}\, t^2$

variable

paramètres

Dimensions : $[\vec{r}_0] = L$ $\quad [\vec{v}_0] = LT^{-1}$ $\quad [\vec{g}] = LT^{-2}$

Interprétation des paramètres :

* $\vec{r}_0$ = position initiale. En effet :

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 + \underbrace{\vec{0}}_{\vec{v}t} + \underbrace{\vec{0}}_{\frac{1}{2}\vec{g}t^2}$$

* $\vec{v}_0$ = vitesse initiale. Calculons la vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \underbrace{\vec{0}}_{\frac{d\vec{r}_0}{dt}} + \underbrace{\vec{v}_0}_{\frac{d(\vec{v}_0 t)}{dt}} + \underbrace{\vec{g}\,t}_{\frac{d\left(\frac{1}{2}\vec{g}t^2\right)}{dt}}$$

Pour $t=0$: $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 + \vec{0}$

↳ $\vec{g}\,t$ en $t=0$.

* $\vec{g}$ = "vecteur d'accélération gravitationnelle"!

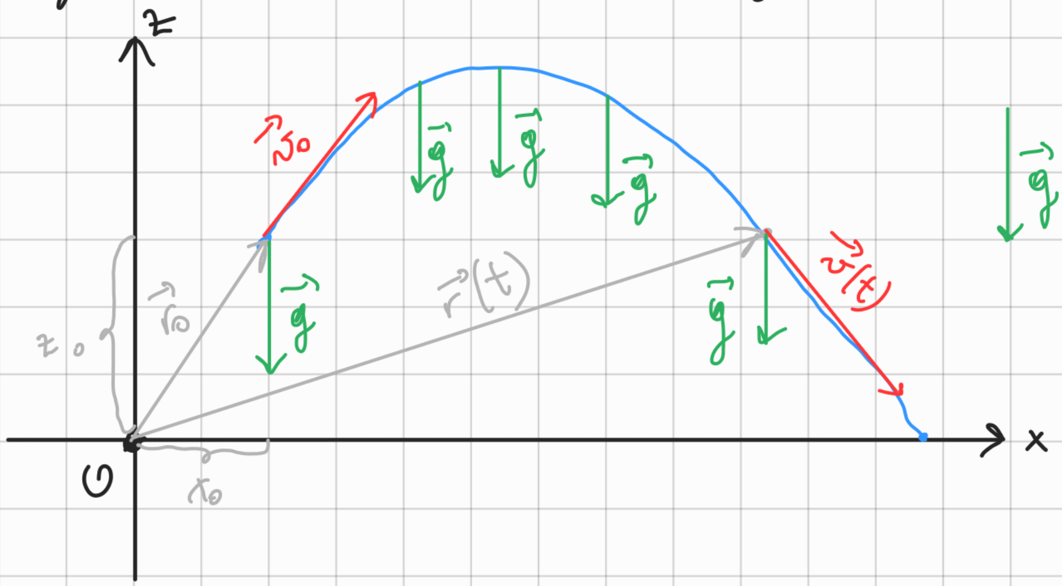
Que vaut l'accélération $\vec{a}(t)$ de cette trajectoire ?

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \underbrace{\vec{0}}_{\frac{d\vec{v}_0}{dt}} + \underbrace{\vec{g}}_{\frac{d(\vec{g}t)}{dt}}$$

> Pour un MUA, l'accélération $\vec{a}(t)$ ne dépend pas du temps :
>
> $$\vec{a} = \vec{g}$$

Remarquons que d'un point de vue expérimental, nous pouvons choisir $\vec{r_0}$ et $\vec{v_0}$, mais pas $\vec{g}$. Nous en reparlerons dans le chapitre suivant.

Regardons ceci dans un système d'axes Oxz :



Oz : verticale ascendante.

On décompose les vecteurs $\vec{r_0}$, $\vec{v_0}$ et $\vec{g}$:

$$\vec{r}_0 = (x_0 ; z_0) \qquad \vec{v_0} = (v_{0x} ; v_{0z})$$

$$\vec{g} = (0, -g) \qquad \text{où} \quad g = 10\, m/s^2 .$$

On a alors, pour les composantes $x(t)$ et $z(t)$ de la position $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \big(x(t) ; z(t)\big) = \vec{r_0} + \vec{v_0}\, t + \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2$$

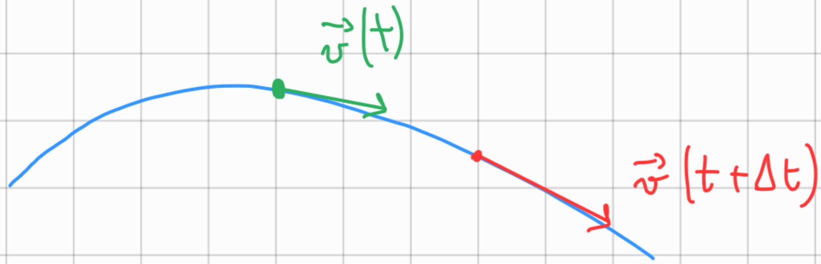
$$= (x_0 ; z_0) + (v_{0x} ; v_{0z})\, t + \frac{1}{2}(0 ; -g)\, t^2$$

$$= (x_0 ; z_0) + (v_{0x} t ; v_{0z} t) + \left(0 ; -\frac{1}{2} g t^2\right)$$

$$= \left(x_0 + v_{0x} t + 0 \; ; \; z_0 + v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2\right)$$

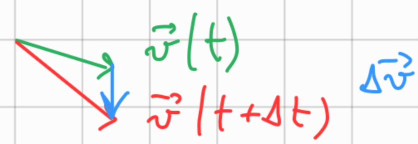
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x} t \\ z(t) &= z_0 + v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}}$$

Nous pouvons comprendre graphiquement pourquoi l'accélération est dirigée vers le bas :



$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta \vec{v}$$



$\Delta \vec{v}$ est dans le sens de l'accélération : en effet, pour Δt petit, on a

$$\vec{a} \simeq \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{v} \simeq \vec{a}\, \Delta t \, .$$

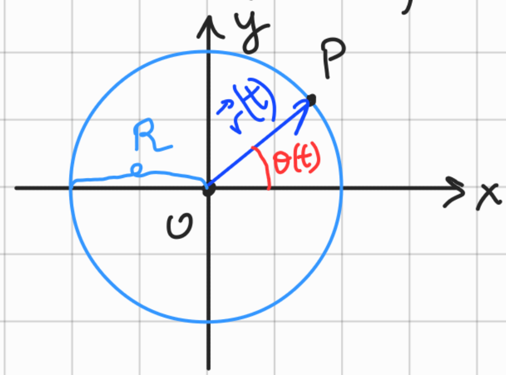
Comme $\Delta \vec{v}$ est dirigé vers le bas, on trouve bien que $\vec{a}$ est aussi dirigé vers le bas.

$\Rightarrow$ ceci est cohérent avec le résultat

$$\vec{a} = \vec{g} = (0, -10\,\mathrm{m/s^2}) \, .$$

C. Exemple 2 : le Mouvement Circulaire Uniforme (MCU)

Définition : le Mouvement Circulaire (MC) est défini par la condition suivante : le point P est toujours à une distance R (fixée) d'un point de référence O (centre) :



R : nombre positif appelé le "rayon".

On doit donc toujours avoir

$$\|\vec{r}(t)\| = R.$$

Le vecteur $\vec{r}(t)$ dépend du temps en général. Mais pour un MC, sa norme est constante.

La décomposition norme-angle donne :

$$\vec{r}(t) = R\left(\cos\theta(t) ; \sin\theta(t)\right)$$

Ici, $\theta(t)$ est une fonction arbitraire du temps.

Définition : le MCU est un MC avec la condition supplémentaire suivante sur $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t ,$$

où θ_0 et ω sont des paramètres :

θ_0 : $[\theta_0] = 1$; "phase" (φ_0) ; angle initial.

ω : $[\omega] = T^{-1}$; vitesse angulaire.

On définit les quantités habituelles :

* fréquence f : $f = \frac{|\omega|}{2\pi}$
* période T : $T = f^{-1}$.

Signe de $\omega \iff$ sens de rotation.
En effet, si $\omega > 0$, alors $\theta(t)$ augmente au cours du temps.
$\Rightarrow$ sens de rotation = trigonométrique.
Inversement, $\omega < 0 \Rightarrow \theta(t) \searrow$, et donc
$\Rightarrow$ sens de rotation = horlogique.

Calculons maintenant la vitesse et l'accélération :

$$\vec{r}(t) = R \left(\cos(\theta_0 + \omega t) ; \sin(\theta_0 + \omega t) \right)$$

$$\vec{v}(t) = R\left(-\omega \sin(\theta_0+\omega t)\,;\ \omega \cos(\theta_0+\omega t)\right)$$

$$= \omega R\left(-\sin(\theta_0+\omega t)\,;\ \cos(\theta_0+\omega t)\right)$$

$$\vec{a}(t) = \omega R\left(-\omega \cos(\theta_0+\omega t)\,;\ -\omega \sin(\theta_0+\omega t)\right)$$

$$= -\omega^2 \underbrace{R\left(\cos(\theta_0+\omega t)\,;\ \sin(\theta_0+\omega t)\right)}_{\vec{r}(t)}$$

On trouve donc $\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$.