(Suite Cinématique à 2D ; MCU)

Rappel : $\vec{r}(t) = R\left(\cos(\theta_0+\omega t)\ ;\ \sin(\theta_0+\omega t)\right)$

$$\vec{v}(t) = \omega R\left(-\sin(\theta_0+\omega t)\ ;\ \cos(\theta_0+\omega t)\right)$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R\left(\cos(\theta_0+\omega t)\ ;\ \sin(\theta_0+\omega t)\right)$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t).$$

Calculons les normes de $\vec{v}$ et $\vec{a}$:

$$v = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\omega R \sin(\theta_0+\omega t)\right)^2 + \left(\omega R \cos(\theta_0+\omega t)\right)^2}$$

$$= \sqrt{(\omega R)^2 \underbrace{\left(\sin(\theta_0+\omega t)^2 + \cos(\theta_0+\omega t)^2\right)}_{=1 \text{ (pour toutes valeurs de } t\text{)}}}$$

$$= \sqrt{(\omega R)^2} = |\omega| R$$

Conclusion : dans un MCU, la norme de la vitesse est constante !
Ceci n'est pas en contradiction avec le fait que l'accélération est non-nulle, car le vecteur vitesse dépend bien du temps.

$$a = \|\vec{a}(t)\| = \cdots = \omega^2 R .$$

On remarque à nouveau que la norme est constante.

<u>Remarque</u> : dimensions ? On doit avoir

$$[a] = LT^{-2}$$

On a bien $[\omega^2 R] = T^{-2} L$ OK !

<u>Rappel mathématique</u> : Pour deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, de composantes $(A_x ; A_y)$ et $(B_x ; B_y)$, on définit le **produit scalaire** par la formule :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

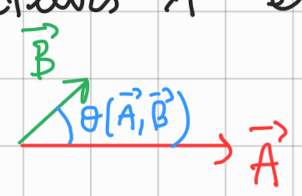
Le résultat est donc un nombre (réel).

<u>Exemple</u> : $\vec{A} = (1; 2)$ $\quad \vec{B} = (-3; 4)$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 = 5 .$$

<u>Propriété</u> : $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta(\vec{A}, \vec{B})$

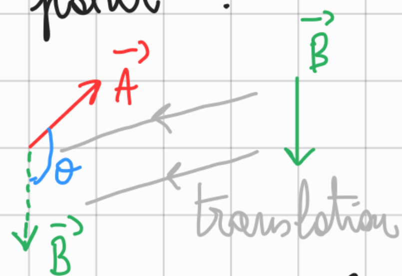
où A = norme $\vec{A}$, B = norme $\vec{B}$, et $\theta(\vec{A}, \vec{B})$ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$:



Preuve : laissée au cours de math.

Remarques :

1). Pour comprendre comment trouver $\theta(\vec{A},\vec{B})$, il faut localiser les vecteurs au même point :

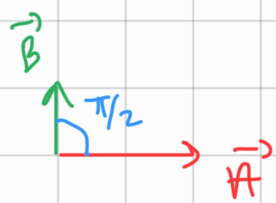


2). On peut écrire la norme de $\vec{A}$ comme la racine carrée du p.s. de $\vec{A}$ avec lui-même :

produit scalaire

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}.$$

3). Si le produit scalaire est nul, alors les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires :



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0.$$

Application : que vaut le p.s. de $\vec{r}(t)$ avec $\vec{v}(t)$?

$$\vec{r}(t) = R\left(\cos(\theta_0 + \omega t) ; \sin(\theta_0 + \omega t)\right) = (x ; y)$$
$$\vec{v}(t) = \omega R\left(-\sin(\theta_0 + \omega t) ; \cos(\theta_0 + \omega t)\right) = (v_x ; v_y)$$

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = x v_x + y v_y$$

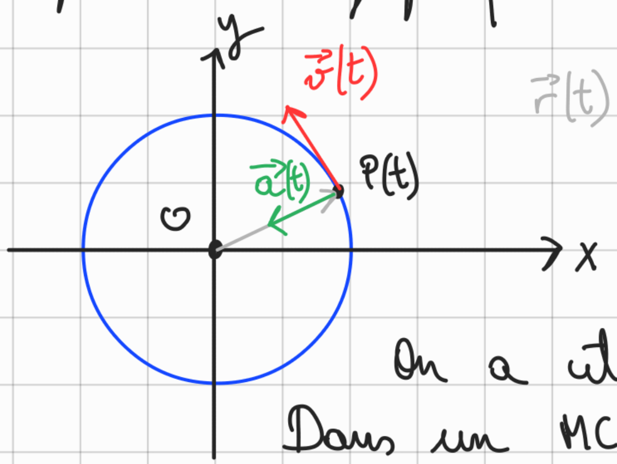
$$= \underbrace{\left(R\cos(\theta_0+\omega t)\right)}_{x}\underbrace{\left(-\omega R\sin(\theta_0+\omega t)\right)}_{v_x} + \underbrace{\left(R\sin(\theta_0+\omega t)\right)}_{y}\underbrace{\left(\omega R\cos(\theta_0+\omega t)\right)}_{v_y}$$

$$= -\omega R^2\sin(\theta_0+\omega t)\cos(\theta_0+\omega t) + \omega R^2\sin(\theta_0+\omega t)\cos(\theta_0+\omega t)$$

$$= 0.$$

Conclusion : pour un MCU, le vecteur position est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse.

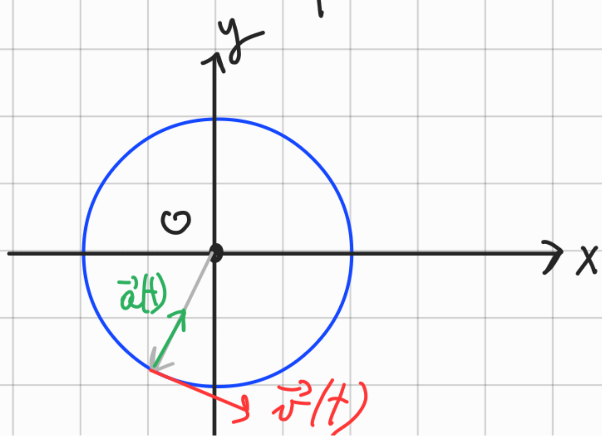
Représentation graphique du MCU :

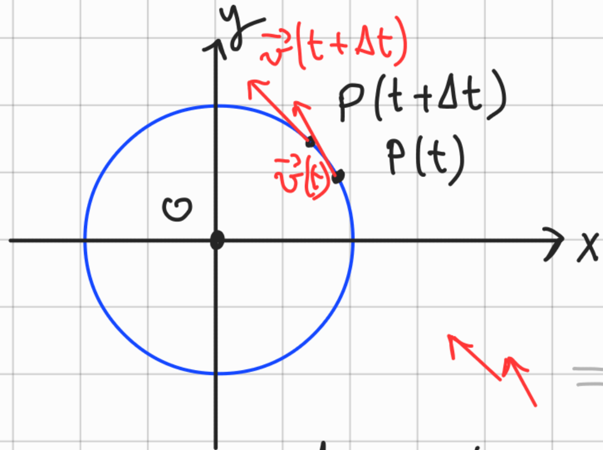


Dans cette représentation graphique, on suppose $\omega > 0$.

On a utilisé $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$.

Dans un MCU, on a donc toujours une accélération $\vec{a}$ parallèle à $\vec{PO}$: on dit que l'accélération est centripète.



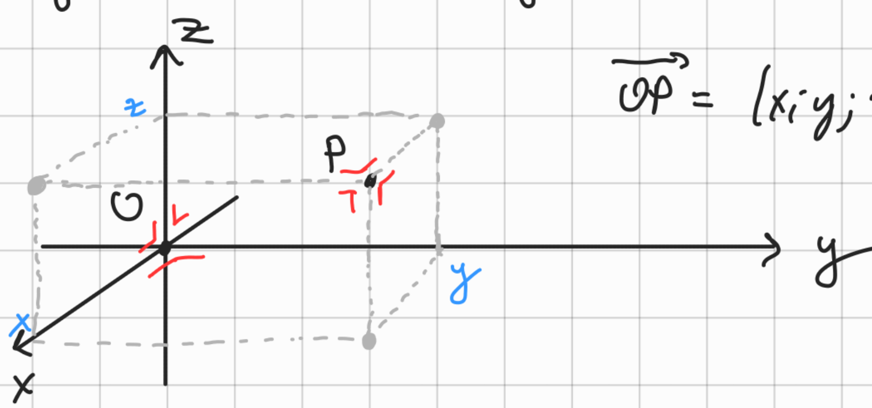


$\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t) = \Delta\vec{v}$

La variation du vecteur vitesse est toujours orientée vers O, ce qui est cohérent avec le sens de l'accélération (qui est centripète).

D. Conventions et Généralisations en 3 dimensions.

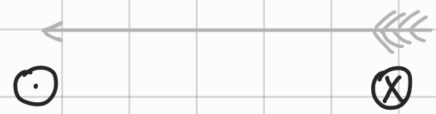
Système d'axes Oxyz :



$\vec{OP} = (x ; y ; z)$

Représentation équivalente :

"Convention de la flèche d'indien" :



Produit scalaire : $\vec{A} = (A_x ; A_y ; A_z)$
$\vec{B} = (B_x ; B_y ; B_z)$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$= AB \cos \theta(\vec{A}, \vec{B}).$$